TITRE DE LA LEÇON : INTEGRALES D'UNE FONCTION CONTINUE

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Analyse

Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

I- PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE

- *Une fonction continue F, est une primitive d'une fonction continue f sur un intervalle I de* $\mathbb{R}$*, si pour tout* $x \in I$, $F'(x) = f(x)$
- ***Tableau des primitives des fonctions usuelles***

Fonction dérivée f : $x \longmapsto$	Fonction primitive F : $x \longmapsto$
$f(x) = 0$ $f(x) = a\,;\, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = k$ $F(x) = ax + c\,;\, a, c, k \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $f(x) = u'u^n$ $f(x) = (ax+b)^n$;$a \neq 0\,;\, n \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ $F(x) = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = -\frac{u'}{u^2}$ $f(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $f(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$F(x) = \frac{1}{u} + c$ $F(x) = \sqrt{u} + c$ $F(x) = \frac{u}{v} + c$
$f(x) = \frac{1}{Cos^2 x}$ $f(x) = \frac{1}{Sin^2 x}$	$F(x) = tanx + c$ $F(x) = -cotanx + c$
$f(x) = Cos(ax+b)$ $f(x) = Sin(ax+b)\,;\, a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}Sin(ax+b) + c$ $F(x) = -\frac{1}{a}Cos(ax+b) + c$

NB : c est une constante réelle

II- INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

- ***On appelle intégrale*** *de « **a** à **b** » d'une fonction continue f, le nombre réel noté :* $\int_a^b f(x)dx$*, défini par :* $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(b) - F(a)$ *; F : primitive de f.*
- ***Propriétés :*** *Les fonctions f, g et h sont supposées continues sur I ;* $m, M \in \mathbb{R}$
  - $\int_a^a f(x)dx = 0\,;\, \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
  - $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ *si f est paire ;*
  - $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ *si f est impaire.*
  - $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$; $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ *;T : période de f.*
  - $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ *: Relation de Chasles*

- $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ *: Linéarité ; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

- ***Techniques du calcul des intégrales :***
  - *Utilisation des primitives des fonctions usuelles*

Exemple : *Calculons :* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2x\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2x\, dx = \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1+\cos 2(\frac{\pi}{4})) - \frac{1}{2}(1+\cos 2(0)) = -\frac{1}{2}$$

  - *Intégration par parties :* $\int_a^b uv'dx = [u.v]_b^a - \int_a^b u'vdx$

Exemple : *Calculons :* $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\ dx$

Posons $u = x$*, alors* $u' = 1$

$v' = \cos 2\,x$, alors $v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\ dx = [x.\cos 2\,x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2x\, dx$;

$I = [x.\cos 2\,x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4}cos\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{4}\left(cos\frac{\pi}{2} - cos0\right) = -\frac{1}{4}$.

Exercice 1 :

On donne les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3x+2)cos^2x\, dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3x+2)sin^2x\, dx$ et

1- Calculer : $I + J$, $I - J$.
2- En déduire I et J.

Exercice 2 :

Calcule chacune des intégrales suivantes :

$I = \int_{-1}^{3} (2x-1)^3\, dx$; $K = \int_{-1}^{2} |x-1|\, dx$; $P = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x\, sin^2 2x\, dx$