TITRE DE LA LEÇON : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN OU DE BASE e
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Analyse
Niveau : Lycée - Classes : Terminales C et D

1- **Définition :** On appelle fonction logarithme népérien, notée : $\ln$, la primitive sur $]0;+\infty[$, de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$, qui s'annule en $x = 1$: $\ln: \begin{array}{l}\mathbb{R}_+{}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x\end{array}$

2- **Propriétés** : Pour tous réels strictement positifs a et b et pour tout réel $\propto$:

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln a^{\propto} = \propto \ln a$; $\ln e = 1$; $\ln 1 = 0$.
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$; $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$; $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$;
- Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$; si $a > 1$, alors : $\ln a > 0$
  NB : $e = 2{,}7182818228 \ldots$: Nombre d'Euler, base du logarithme Népérien.

3- **Quelques conditions d'existence des fonctions composées avec ln**

Fonction	$\ln u \quad \lvert\ln u\rvert; \ln\sqrt{u}$	$\ln u^2; \ln\sqrt{\lvert u\rvert}$; $\ln\lvert u\rvert$	$\ln\left(\frac{u}{v}\right)$	$\ln\left\lvert\frac{u}{v}\right\rvert$	$\ln u^n; n \in \mathbb{N}^*$
Condition	$u > 0$	$u \neq 0$	$\frac{u}{v} > 0$ et $u \neq 0$	$u \neq 0$ et $v \neq 0$	$u \neq 0$, si n est pair $u > 0$, si n est impair

Remarque : $\ln u^2 = 2\ln\lvert u\rvert$; $\ln^2 u = (\ln u)^2$

4- **Limites fondamentales ou de références ou limites classiques**

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\propto}\ln x = 0$; $\propto \in \mathbb{R}_+{}^*$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\propto}} = 0$; $\propto \in \mathbb{R}_+{}^*$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a$

5- **Dérivée** : Si u est une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, alors $\ln u$ est dérivable sur I et

$(\mathrm{Ln}\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Remarque :
La fonction logarithme de base a, notée : $\log_a$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[= \mathbb{R}_+{}^*$ par :
$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, où a est un réel strictement positif et différent de 1.
La fonction logarithme décimal (ou de base 10), notée : log, est la fonction définie sur $]0;+\infty[= \mathbb{R}_+{}^*$ par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$; avec $\log 10 = 1$ et $\log 1 = 0$

Exercice1

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par : $f(x) = 2\ln(1+x)$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$;unité graphique : 2 cm.

1- a) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f à droite de -1 et en $+\infty$.
   b) Préciser les branches infinies de (C) de f.
2- a) Calculer la dérivée de f puis étudier son signe.
   b) Dresser le tableau de variation de f, puis tracer la courbe (C).
3- a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on dressera le tableau de variation.
   b) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que (C).
   c) Calculer $(f^{-1})'(4\ln 2)$.
   d) Expliciter puis vérifier le résultat de la question 3-c)
4- Soit l'intervalle : $I = [2.3]$
   a) Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
   b) Montrer que l'équation f(x)=x admet une solution unique $\alpha \in I$.
   c) Montrer que, pour tout $x \in I$, $|f(x')| \leq \frac{2}{3}$.
5- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}\ |u_n - \alpha|$
   c) En déduire que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
   e) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$; $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

Exercice2

Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par : $f(x) = \log_2 x$.

Exercice 3

On se propose d'étudier la fonction numérique f à variable réelle x définie sur $\left]-\infty;0\right[$ par :

$$f(x) = \ln(-x) + \frac{\ln(-x)}{x}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath},\vec{\jmath}$). Unité graphique : 2cm.

1- Soit la fonction numérique g définie sur $\left]-\infty;0\right[$ par : $g(x) = 1 + x - \ln(-x)$.
   a) Calculer la dérivée de g, puis dresser le tableau de variation de g.
   b) En déduire le signe de g sur $\left]-\infty;0\right[$ (On pourra calculer g(-1)).

2-a) Montrer que, pour tout x de $\left]-\infty;0\right[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ (1pt)

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\left]-\infty;0\right[$.Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$

d) Construire la courbe (C) de f

e) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -e$ et $x = -1$