TITRE DE LA LEÇON : FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Analyse
Niveau : Lycée - Classes : Terminales C et D

I- RAPPEL : PARITE, PERIODICITE. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Une fonction numérique f définie sur E_f est :

$$\begin{cases} Paire \ \ si \ \ \forall x \in E_f, -x \in E_f \ etf(-x) = f(x) \\ Impaire \ \ si \ \ \forall x \in E_f, -x \in E_f \ etf(-x) = -f(x) \\ Périodique, de\ période\ T \ \ si\ \forall x \in E_f, x+T \in E_f \ etf(x+T) = f(x) \end{cases} ;$$

Conséquences :

- Si f est paire, alors l'axe des ordonnées, est un axe de symétrie de la courbe (C) de f.
- Si f est impaire, alors l'origine du repère est un centre de la courbe (C) de f.

Remarque

- Un point $I(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe d'une fonction numérique f si et seulement si :
$$\forall x \in E_f, \qquad 2a - x \in E_f \ et\ f(2a-x) + f(x) = 2b$$
- Une droite (D) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe d'une fonction numérique f si et seulement si : $\forall x \in E_f,\ 2a - x \in E_f \ et\ f(2a-x) = f(x)$

2-ETUDE DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

-Les fonction trigonométriques : $x \mapsto \cos(ax+b)$ ou $\mapsto \sin(ax+b)$; $a \in \mathbb{R}^*$, sont définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période : $T = \frac{2\pi}{|a|}$. On peut les étudier sur un intervalle I de longueur T de la forme :: $I = [0;T]$ ou $I = \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ ou $I = [\alpha;\alpha+T]$ ou $I = \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ ou $I = \left[-\frac{b}{a};-\frac{b}{a}+T\right]$ ou $I = \left[-\frac{b}{a}-\frac{T}{2};-\frac{b}{a}+\frac{T}{2}\right]$.

-Les fonction trigonométriques f : $x \mapsto \tan(ax+b)$ ou $\mapsto \cot(ax+b)$; $a \in \mathbb{R}^*$, sont périodiques de période : $T = \frac{\pi}{|a|}$. On peut les étudier sur un intervalle I de la forme : $I = E_f \cap \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ ou $I = E_f \cap \left[-\frac{b}{a}-\frac{T}{2};-\frac{b}{a}+\frac{T}{2}\right]$.

Remarques

- Les fonctions circulaires : $x \mapsto \cos x$ ou $x \mapsto \sin x$ sont périodiques, de période $T = 2\,\pi$.
- Si $b \neq \pi k \; ou \; b \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}^*$. alors les fonctions trigonométriques : $x \mapsto \cos(ax+b)$ ou $\mapsto \sin(ax+b)$ ne sont, ni paires, ni impaires.
- La courbe représentative d'une fonction trigonométrique f de période T, sera complétée dans tout le plan (sur E_f) par des translations successives de vecteurs : $\vec{u} = kT\,\vec{\imath}$; $k \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice : On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x}{1+\ x^2} & si\ x < 0 \\ f(x) = \quad \sin(\pi x\,) & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1-Montrer que f peut être étudiée sur $E =]-\infty\,; 2]$.

2-Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

a) Calculer la dérivé de f dans chacun des intervalles où f est dérivable.

b) Dresser le tableau de variations de f .

3- Construire la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).

4- Soit h la restriction de f à l'intervalle$[-1; 0[$.

a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on donnera le tableau de variations.

b) Sans expliciter $h^{-1}(x)$, calculer $(h^{-1})'(\frac{2}{5})$.

c) Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C) de f.

5-Soit g la fonction définie sur $E =]-\infty\,; 2]$ par : $g(x) = -f(x)$. Sans étudier g, construire la courbe (C'') de g dans le même repère que (C) de f.