

TITRE DE LA LEÇON : THEOREMES FONDAMENTAUX

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Analyse

Niveau : Lycée - Classes : Terminales C et D

1- THEOREMES DE COMPARAISON

Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un même intervalle $I =]a; +\infty[$ ou $(I =]-\infty; a])$

- Si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $\begin{cases} \text{si } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \\ \text{si } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$
- Si $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$ et $\begin{cases} \text{si } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \text{si } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$
- Si $\forall x \in I, |f(x) - l| \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$; $l \in \mathbb{R}$
- Si $\forall x \in I, h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$,
alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (Théorème des gendarmes)

2- THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

Si une fonction est continue (surjective) et monotone (injective) sur un intervalle $]a; b[$ et si de plus $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe un réel unique $\alpha \in]a; b[$ tel que : $f(\alpha) = 0$. On dit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x = \alpha$ telle que : $f(\alpha) = 0$.

Remarque :

- ✓ Un réel α , solution de l'équation $f(x) = x$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$, est appelé : Point fixe d'une fonction numérique f .
- ✓ Si toutes les courbes (C_m) d'une famille de fonctions f_m , passent par même point M , alors ce point est appelé : Point fixe de (C_m) . Pour déterminer ce point, on peut résoudre l'équation :

$$f_{m+1}(x) - f_m(x) = 0$$

3- Théorème de la réciproque continue d'une fonction bijective

Si une fonction numérique f est continue et monotone (ou strictement monotone) sur un intervalle $I = [a; b]$, alors elle réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Par conséquent, f admet une bijection réciproque f^{-1} définie de $f(I)$ vers I et variant dans le même sens que f .

NB : Graphiquement, la courbe de f et celle de f^{-1} , sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation : $y = x$



4- Théorème de Rolle (Michel) Si une fonction numérique f est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{--continue sur } [a; b] \\ \text{--dérivable sur }]a; b[\text{ , alors il existe au moins un réel } c \text{ de }]a; b[\text{ tel que: } f'(c) = 0 \\ \text{--et si de plus } f(a) = f(b) \end{array} \right.$$

NB : Graphiquement, le théorème de Rolle signifie qu'il existe au moins un point M de la courbe (C) de f dont la tangente à (C) , est parallèle à l'axe des abscisses.

5- Théorème des accroissements finis Si une fonction numérique f est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{--continue sur } [a; b] \\ \text{--et dérivable sur }]a; b[\end{array} \right. \text{ , alors il existe au moins un réel } c \text{ de }]a; b[\text{ tel que: } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

NB : Graphiquement, le théorème des accroissements finis signifie qu'il existe au moins une tangente de coefficient directeur $f'(c)$ qui est parallèle à la droite (AB) ; $A(a; f(a)), B(b; f(b))$.

6- Inégalités des accroissements finis Si une fonction numérique f est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{--continue sur } [a; b] \\ \text{--dérivable sur }]a; b[\end{array} \right. \text{ , alors } m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{--et s'il deux réels } m \text{ et } M \text{ tels que: } \forall x \in [a; b], m \leq f'(x) \leq M \\ m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a), \text{ avec } b-a > 0 \end{array} \right.$$

Ou encore :

Si une fonction numérique f est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{--continue sur } [a; b] \\ \text{--dérivable sur }]a; b[\end{array} \right. \text{ , alors}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{--et s'il un réel } M, \text{ tel que: } \forall x \in [a; b], |f'(x)| \leq M \\ \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| \leq M \Leftrightarrow |f(b) - f(a)| \leq M|b-a| \end{array} \right.$$

Remarque

- ✓ A l'aide des inégalités des accroissements finis (IAF), on peut trouver une approximation ou une valeur approchée du point fixe α
- ✓ Si une suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, est convergente, alors sa limite est solution de l'équation de l'équation « au point fixe » : $f(x) = x$ telle que : $f(\alpha) = \alpha$