TITRE DE LA LEÇON : SUITES RECURRENTES
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Analyse
Niveau : Lycée - Classes : Terminales C et D

1- Représentation graphique d'une suite récurrente définie par son premier terme et par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continu

Pour représenter graphiquement une telle suite, on procède de la manière suivante :

- On trace la courbe (C) de la fonction f : $x \longmapsto f(x)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$;
- Le premier terme u_0 étant donné, on obtient $u_1 = f(u_0)$ comme ordonné du point $(u_0 ; u_1)$ de (C) ;
- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation : $y = x$

NB : Toute solution réelle α de l'équation $f(x) = x$ telle que : $f(\alpha) = \alpha$ est appelée point fixe de la fonction f. L'existence d'un point fixe pour une fonction f, ne prouve pas la convergence de la suite (u_n) dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) est convergente, alors la limite l de cette suite, est l'abscisse du point d'intersection de (C) avec la première bissectrice d'équation : $y = x$.

2- Suites récurrentes linéaires du premier ordre : $\begin{cases} \mathbf{u_{n+1} = au_n + b}; a \neq 1; b \neq 0 \\ \mathbf{u_0}, \end{cases}$

Soit $u_{n+1} = f(u_n)$. On pose $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l; l \in \mathbb{R})$

Si f est continue sur sur un intervalle contenant l, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim\limits_{x \to l} f(x) = f(l) = l$. Donc l est solution de l'équation : $l = f(l)$: $l = al + b$. On obtient : $l = \frac{b}{1-a}$.

On définit la suite auxiliaire (v_n): $v_n = u_n - l$ et on obtient : $v_{n+1} = av_n$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison a , de premier terme : $v_0 = u_0 - l$ et de terme général : $v_n = v_0 q^n$.

Ainsi : $u_n = v_n + l = v_0 q^n + l$ est le terme général de la suite (u_n).

3- Suites récurrentes linéaires du deuxième ordre : $\begin{cases} \mathbf{au_{n+2} = bu_{n+1} + cu_n} \\ \mathbf{u_0}, \ \mathbf{u_1} \end{cases} (\mathbf{E})$

Pour déterminer le terme général des telles suites, on peut résoudre l'équation caractéristique :

$ar^2 - br - c = 0$ et trouver le terme général de (u_n) comme suit :

$\Delta = b^2 - 4a(-c)$ *ou* $\Delta' = b'^2 - a(-c)$	*Solution de l'équation caractéristique*	*Terme général de* (u_n)
$\Delta = 0$	*Une solution double : r*	$u_n = (An + B)r^n$
$\Delta > 0$	*Deux solutions réelles :* r_1 *et* r_2	$u_n = A\,{r_1}^n + B\,{r_2}^n$

$\Delta < 0$	*Deux solutions complexes conjuguées :* $r_1 = \rho e^{i\theta}$ *et* $r_2 = \rho e^{-i\theta}$	$u_n = (A\cos n\theta + B\sin n\theta)\rho^n$

NB : A, B, θ et ρ; $\rho > 0$ sont des constantes réelles.

4- Suites récurrentes linéaires de la forme : $\begin{cases} \mathbf{u_{n+1} = \alpha u_n + p(n)} \\ \mathbf{u_0} \end{cases}$

Où P est un polynôme de degré m en n.

On détermine le terme général u_n *de la suite* (u_n)*, en posant :* $u_n = v_n + q(n)$ *où :*

- (v_n) est une suite définie par : $\begin{cases} v_{n+1} = \alpha v_n \\ v_0 \end{cases}$
- q est un polynôme en n, tel que :
  - Si $\alpha = 1$, alors d°q $\leq m + 1$ et q(n) vérifie : $q(n+1) = \alpha q(n) + p(n)$
  - Si $\alpha \neq 1$, alors d°q $\leq m$ et q(n) vérifie : $q(n+1) = \alpha q(n) + p(n)$

5- Suites récurrentes homographiques de la forme : $\begin{cases} \mathbf{u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}} \\ \mathbf{u_1} \end{cases}$ $(\mathbf{I})$

où a, b, c et d sont des nombres réels non nuls

Soit f la fonction : $x \longmapsto f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

f étant une fonction rationnelle, est donc continue sur son ensemble de définition.

Si la suite des nombres réels (u_n) admet une limite réelle L, alors cette limite est un point fixe de la fonction f, solution de l'équation : $f(x) = x$

Alors : $f(L) = L \Leftrightarrow \frac{aL+b}{cL+d} = L \Leftrightarrow cL^2 + (d-a)L - b = 0$ (E)

Pour étudier des telles suites, on peut résoudre l'équation (E)

$\Delta = (d-a)^2 - 4c(-b)$	Solution de l'équation(E)	Terme général de (u_n)
$\Delta = 0$	Une solution réelle double : L	On définit la suite auxiliaire (v_n): $v_n = \frac{1}{u_n - L}$. (v_n) est une suite géométrique. On exprime donc u_n en fonction de n.
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles : L_1 et L_2	On définit la suite auxiliaire (v_n): $v_n = \frac{u_n - L_1}{u_n - L_2}$. (v_n) est une suite géométrique. On exprime donc u_n en fonction de n.
$\Delta < 0$	(u_n) diverge	

NB Etudier une suite (u_n), c'est déterminer son terme général, étudier sa convergence et étudier sa monotonie (si possible)

Exercice. Déterminer le terme général de la suite dans chacun des cas suivants, puis étudier sa convergence, si possible :

a) $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 5 \\ u_0 = 1 \end{cases}$;b) $\begin{cases} u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n \\ u_0 = 1; u_1 = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ u_0 = 1; u_1 = 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \\ u_0 = u_1 = \sqrt{3} \end{cases}$;

e) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$; f) $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + n^2 + 3n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$;

$g)\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n} \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$;h) $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n-1}{u_n} \\ u_1 = 5 \end{cases}$;$i)$ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{-1}{1+u_n} \\ u_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$;j) $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n-3}{1+u_n} \\ u_1 = -2 \end{cases}$