TITRE DE LA LEÇON : THEOREMES FONDAMENTAUX
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Analyse
Niveau : Lycée - Classes : Terminales C et D

1- Théorèmes de comparaison

Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un même intervalle $I =]a;+\infty[$ ou $(I =]-\infty; a[)$

— Si $\forall x \in I, f(x) \le g(x)$ et $\begin{cases} \text{si} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, alors \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \\ \text{si} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty, alors \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

— Si $\forall x \in I, f(x) \ge g(x)$ et $\begin{cases} \text{si} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, alors \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \text{si} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, alors \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$

— Si $\forall x \in I, |f(x) - l| \le g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0, alors \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \; ; l \in \mathbb{R}$

— Si $\forall x \in I, h(x) \le f(x) \le g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$,

$alors \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (Théorème des gendarmes)

2- Théorème des valeurs intermédiaires

Si une fonction est continue (surjective) et monotone (injective) sur un intervalle $]a; b[$ et si de plus $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe un réel unique $\alpha \in]a; b[$ tel que : $f(\alpha) = 0$. On dit que l'équation

$f(x) = 0$ admet une solution unique $x = \alpha$ telle que : $f(\alpha) = 0$.

Remarque :

- ✓ Un réel α, solution de l'équation $f(x) = x$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$, est appelé : Point fixe d'une fonction numérique f.
- ✓ Si toutes les courbes (C_m) d'une famille de fonctions f_m, passent par même point M, alors ce point est appelé : Point fixe de (C_m). Pour déterminer ce point, on peut résoudre l'équation : $f_{m+1}(x) - f_m(x) = 0$

3- Théorème de la réciproque continue d'une fonction bijective

Si une fonction numérique f est continue et monotone (ou strictement monotone) sur un intervalle $I = [a; b]$, alors elle réalise une bijection de I sur f(I).

Par conséquent, f admet une bijection réciproque f^{-1} définie de f(I) vers I et variant dans le même sens que f.

NB : Graphiquement, la courbe de f et celle de f^{-1}, sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation : $y = x$

4- **Théorème de Rolle (Michel)** Si une fonction numérique f est :

$\begin{cases} -\text{continue sur}[a;b] \\ -\text{dérivable sur }]a;b[\\ -\text{et si de plus f}(a)=\text{f}(b) \end{cases}$, alors il existe au moins un réel c de$]a;b[$ tel que: $f'(c)=0$

NB : Graphiquement, le théorème de Rolle signifie qu'il existe au moins un point M de la courbe (C) de f dont la tangente à (C), est parallèle à l'axe des abscisses.

5- **Théorème des accroissements finis** Si une fonction numérique f est :

$\begin{cases} -\text{continue sur}[a;b] \\ -\text{ et dérivable sur }]a;b[\end{cases}$, alors il existe au moins un réel c de$]a;b[$ tel que: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

NB : Graphiquement, le théorème des accroissements finis signifie qu'il existe au moins une tangente de coefficient directeur $f'(c)$ qui est parallèle à la droite (AB) ; $A(a;f(a)), B(b;f(b))$.

6- **Inégalités des accroissements finis** Si une fonction numérique f est :

$\begin{cases} -\text{continue sur}[a;b] \\ -\text{dérivable sur }]a;b[\\ -\text{et s'il deux réels m et M tels que}: \forall x\in[a;b], m\le f'(x)\le M \end{cases}$, alors $m\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le M \Leftrightarrow$
$m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$, avec $b-a>0$

Ou encore :

Si une fonction numérique f est :

$\begin{cases} -\text{continue sur}[a;b] \\ -\text{dérivable sur }]a;b[\\ -\text{et s'il un réel M, tel que}: \forall x\in[a;b], |f'(x)|\le M \end{cases}$, alors

$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\le M \Leftrightarrow |f(b)-f(a)|\le M|b-a|$

Remarque

- ✓ A l'aide des inégalités des accroissements finis (IAF), on peut trouver une approximation ou une valeur approchée du point fixe α
- ✓ Si une suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0\in\mathbb{R} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$, est convergente, alors sa limite est solution de l'équation de l'équation « au point fixe » : $f(x)=x$ telle que : $f(\alpha)=\alpha$