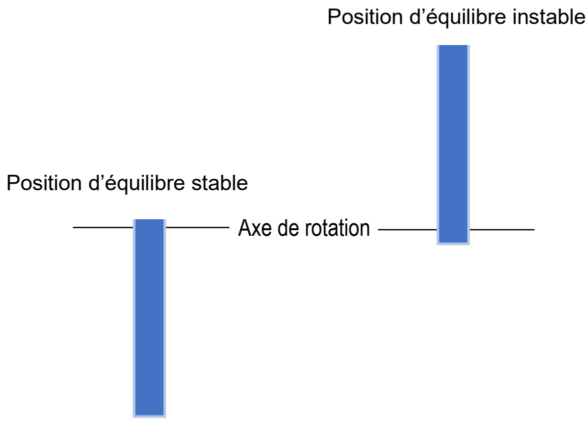
TITRE DE LA LEÇON : OSCILLATEURS MECANIQUES NON HARMONIQUES

Discipline : Sciences physiques
Sous-discipline : Physique
Cycle : Lycée - Niveaux : Terminale D

I. Le pendule pesant

I.1. Description

Le pendule pesant est un solide mobile autour d'un axe horizontal qui ne passe pas par son centre de masse. Lorsque l'axe de rotation et le centre de masse **G** du solide se trouvent dans le même plan vertical, le solide est dans une position d'équilibre. Il existe deux positions d'équilibre : la position d'équilibre stable (le point **G** est au-dessous de l'axe) et la position d'équilibre instable (le point **G** est au-dessus de l'axe).



I.2.Etude dynamique

On se propose d'établir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie d'un pendule pesant, pour vérifier si les oscillations sont harmoniques. Le dispositif à étudier est représenté ci-après. Les frottements sont négligeables.

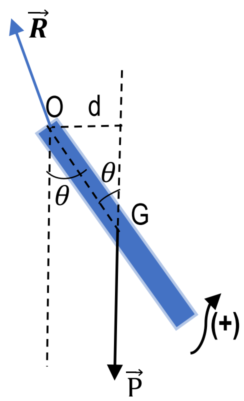
Le solide est écarté de sa position d'équilibre stable d'un angle quelconque, puis abandonné ; il se met alors à osciller.

Nature des oscillations.

Etude dans le référentielle terrestre supposé galiléen.

Système : solide en rotation autour d'un axe horizontal qui ne passe pas par son centre de masse.

Forces extérieures : le poids ($\vec{P}$) ; la réaction de l'axe appliquée au point O ($\vec{R}$)



Théorème de l'accélération angulaire : $M_\Delta^{(\vec{P})} + M_\Delta^{(\vec{R})} = J_\Delta\,\ddot{\theta}$

Avec $M_\Delta^{(\vec{R})} = 0$; $M_\Delta^{(\vec{P})} = -Pd$; $d = OG\sin\theta$; $P = Mg$; ce qui entraine : $M_\Delta^{(\vec{P})} = -MgOG\sin\theta$.

Remplaçons les expressions des moments dans la première relation ; on trouve : $-MgOG\sin\theta = J_\Delta\,\ddot{\theta}$. Ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\boldsymbol{MgOG}}{\boldsymbol{J_\Delta}}\sin\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$

En posant $\omega^2 = \frac{MgOG}{J_\Delta}$, l'équation différentielle se met sous la forme : $\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\omega^2}\sin\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$; ceci n'est l'équation différentielle d'un mouvement circulaire sinusoïdal **: d'une manière générale, les oscillations du pendule pesant ne sont pas harmoniques.**

***<u>Cas des oscillations de faibles amplitudes</u>**

Considérons les oscillations pour lesquelles la valeur de l'angle reste inférieure ou égale à 8° ($\theta \leq 8°$). Les approximations suivantes sont valables :

$\sin\boldsymbol{\theta} \simeq \boldsymbol{\theta}$, et $\cos\boldsymbol{\theta} \simeq \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{\mathbf{2}}$, θ étant exprimé en rad.

L'équation différentielle devient :

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\boldsymbol{MgOG}}{\boldsymbol{J_\Delta}}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$

Ce qui est de la forme $\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\omega^2\theta} = \mathbf{0}$; avec $\omega^2 = \frac{MgOG}{J_\Delta}$ **: les oscillations de faible amplitude d'un pendule pesant sont donc harmoniques.**

Période des oscillations de faible amplitude

La période est la durée d'une oscillation complète. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec $\omega = \sqrt{\frac{MgOG}{J_\Delta}}$; ce qui conduit à l'expression :

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{MgOG}}}$$

I.3.Etude énergétique

On veut déterminer à présent l'équation différentielle par la méthode énergétique. On procédera de la manière suivante :

- Choisir un système dont l'énergie mécanique se conserve ;
- Trouver l'expression de l'énergie mécanique ;
- Déduire l'équation différentielle à partir de la dérivée de l'énergie mécanique.

a) Choix d'un système dont l'énergie mécanique se conserve.

Etude dans le référentielle terrestre supposé galiléen.

Système : ensemble **solide – Terre**.

Force extérieure : la réaction du support du pendule $\vec{R}$ (force non conservative)

Force intérieure : le poids $\vec{\boldsymbol{P}}$ (force conservative)

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique entre deux états quelconques (1) et (2) du solide :

$$\mathrm{E_{M_2} - E_{M_1}} = \sum \mathrm{W}_{1\to2}^{(\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{int_{nc}}})} + \sum \mathrm{W}_{1\to2}^{(\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}})}$$

Comme il n'y a pas de force intérieure non conservative, alors : $\sum \mathrm{W}_{1\to2}^{(\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{int_{nc}}})} = 0$. Puisque la seule force extérieure est $\vec{\boldsymbol{R}}$; on a donc : $\sum \mathrm{W}_{1\to2}^{(\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}})} = W_{1\to2}^{(\vec{R})} = 0$. En remplaçant les valeurs précédentes dans le théorème de l'énergie mécanique, on trouve : $\mathbf{E_{M_1} = E_{M_2}}$; l'énergie mécanique du système **solide – Terre** se conserve.

b) Expression de l'énergie mécanique du système solide – Terre.

$E_M = E_C + E_{PP}$; $E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$ et $E_{PP} = MgOG(1-\cos\theta)$ (confère cours sur l'énergie potentielle).

Ainsi

$$\boldsymbol{E_M = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + MgOG(1-\cos\theta)}$$

c) Equation différentielle

Puisque E_M est constante, alors $\frac{dE_M}{dt} = 0$. Or $\frac{dE_M}{dt} = J_\Delta\,\dot{\theta}\ddot{\theta} + MgOG\dot{\theta}\sin\theta$. On a donc :

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{MgOG}{J_\Delta}\sin\theta = 0}$$

***<u>Cas des oscillations de faibles amplitudes</u>**

Si l'on remplace dans l'expression de l'énergie mécanique, $\boldsymbol{\cos\theta}$ par $\boldsymbol{1-\frac{\theta^2}{2}}$, on trouve :

$$\boldsymbol{E_M = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MgOG\frac{\theta^2}{2}}$$

L'équation $\frac{dE_M}{dt} = 0$ conduit alors à l'équation différentielle ci-après :

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{MgOG}{J_\Delta}\theta = 0}$$

Expression de l'énergie mécanique en fonction de l'amplitude

En remplaçant dans l'expression de l'énergie mécanique θ et $\dot{\theta}$ par $\theta_m\sin(\omega t+\varphi)$ et $\omega\theta_m\cos(\omega t+\varphi)$, sachant que $J_\Delta\omega^2 = MgOG$,on trouve :

$$E_M = \frac{1}{2} MgOG\theta_m{}^2$$

II. Le pendule simple

II.1. Description

Le pendule simple est constitué d'un fil inextensible fixé par l'une de ses extrémités à un support fixe, alors que l'autre extrémité porte un solide ponctuel. La masse du fil est négligeable devant celle du solide ponctuel. La principale caractéristique du pendule simple est la longueur du fil.

II.2. Nature des oscillations

Le pendule simple peut être considéré comme une forme simplifiée du pendule pesant, avec les correspondances suivantes : $OG = l$, la longueur du fil ; $J_\Delta = ml^2$, m étant la masse du solide ponctuel. L'équation différentielle devient :

$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{ml^2} \sin\theta = 0 \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0}$ **; les oscillations ne sont pas harmoniques.**

Cas des oscillations de faibles amplitudes

Dans le cas des oscillations de faible amplitude, comme $\sin\theta = \theta$, l'équation différentielle devient :

$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$ **;** c'est l'équation différentielle d'un mouvement circulaire sinusoïdal **: les oscillations de faible amplitude d'un pendule simple sont harmoniques.**

La période des oscillations de faible amplitude

On a : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$; ce qui donne $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

Expression de l'énergie mécanique en fonction de l'amplitude

Pour le pendule pesant, l'expression de l'énergie mécanique est $E_M = \frac{1}{2} MgOG\theta_m{}^2$. Il suffit de remplacer **M** par **m** et **OG** par **l** pour obtenir la relation :

$$E_M = \frac{1}{2} mgl\theta_m{}^2$$

Applications

Une tige homogène AB de masse M = 1,5 kg et de longueur L = 60 m peut osciller, sans frottements, autour d'un axe vertical (Δ) qui passe par le point O distant du point A de $\frac{L}{6}$.

1) Calcule le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Δ).
2) La tige est écartée de sa position initiale d'un angle de 20° puis lâchée ; elle se met à osciller autour de sa position d'équilibre. Montre que les oscillations ne sont pas harmoniques.
3) On considère les oscillations de faible amplitude.
   a) Montre que la période **T** de ces oscillations peut s'écrire sous la forme : $T = 2\pi\sqrt{\frac{7L}{12g}}$.
   b) Calcule sa valeur.
4) Un pendule est synchrone d'un autre lorsque les deux effectuent des oscillations de même période. Trouve la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule pesant.