# TITRE DE LA LEÇON : LES OSCILLATEURS MECANIQUES HARMONIQUES

**Discipline : Sciences physiques**
**Sous-discipline : Physique**
**Cycle : Lycée - Niveaux : Terminale D**

## I. Oscillateurs de translation

### I.1. Mouvement rectiligne sinusoïdal

#### I.1.1. Définition

Le mouvement rectiligne sinusoïdal est un mouvement de va-et-vient autour d'une position centrale, suivant une trajectoire rectiligne.
* Les points d'un oscillateur harmonique de translation sont animés d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.

#### I.1.2. Equation horaire

L'équation horaire d'un mouvement rectiligne sinusoïdal est de la forme :
$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$ ou $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$
avec $\boldsymbol{x}$ l'élongation à l'instant **t**, $\boldsymbol{x_m}$ l'élongation maximale encore appelée amplitude ; $\boldsymbol{\omega}$ la pulsation (elle s'exprime en rad/s) ; $\boldsymbol{\varphi}$ la phase à l'origine et $\boldsymbol{\omega t + \varphi}$ la phase à l'instant **t**.
Les termes $x_m$ et $\varphi$ sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} x_m \sin\varphi = x_0 \\ \omega\, x_m \cos\varphi = \dot{x}_0 \end{cases}$$

#### I.1.3. Equation différentielle

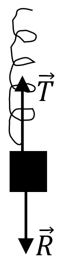
Si on dérive deux fois l'équation horaire, on obtient une équation différentielle :
$\dot{x} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi)$ et $\ddot{x} = -\,\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$; ce qui conduit à $\ddot{x} = -\,\omega x^2$.
D'où l'équation différentielle :
$\boldsymbol{\ddot{x} + \omega x^2 = 0}$

#### I.1.4. Période du mouvement :

La période T est la durée d'une oscillation complète ; elle est définie par la relation
$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

### I.2.Etude dynamique d'un oscillateur harmonique de translation

On considère le dispositif représenté ci-contre. Le ressort a une constante de raideur k ; la masse du solide est m.
A l'équilibre, le solide s'allonge de $\Delta \boldsymbol{l_0}$.
On écarte le solide de sa position d'équilibre d'une longueur **a** puis on l'abandonne sans vitesse initiale à un instant pris comme origine des dates. Il se met à osciller de part et d'autre de la position d'équilibre.
On se propose de déterminer :
- la nature du mouvement du solide ;
- l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie du solide ;
- la période du mouvement.




#### I.2.1. La nature du mouvement du solide

Etude dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Système : solide de masse **m** suspendu à un ressort.
Forces extérieures : le poids ($\vec{\mathbf{P}}$); la force exercée par le ressort ($\vec{\mathbf{T}}$).
Théorème du centre d'inertie : $\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{T}} = \mathbf{m}\,\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{G}}$
Projection suivant l'axe verticale y'y orienté vers le bas : $P - T = m\,\bar{a}_G$ ; avec $\bar{a}_G$ la mesure algébrique de $\vec{a}_G$ sur l'axe y'y.
A l'équilibre $T = k\Delta l_0$ et $\bar{a}_G = 0$, et comme
$P = mg$, on trouve : $\boldsymbol{mg - k\Delta l_0 = 0}$(1).
A un instant quelconque pendant le mouvement, $T = k\Delta l$, avec $\Delta l = y + \Delta l_0$, et $\bar{a}_G = \ddot{y}$. Ce qui donne
$mg - k(y + \Delta l_0) = m\,\ddot{y}$, ou $g - k\Delta l_0 - ky = m\,\ddot{y}$..

Tenant compte de la relation (1), on trouve : $-ky = m\,\ddot{y}$ ; ce qui entraine : $m(\ddot{y} + \frac{k}{m}y) = 0$. Comme $m = 0$ ; il vient :

$$\boldsymbol{\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0}$$

Si on pose $\omega^2 = \frac{k}{m}$, l'équation différentielle devient $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ ; c'est l'équation d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.
**Conclusion** : le *centre d'inertie du solide est donc animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal*.

### I.2.2. Equation horaire

L'équation horaire est de la forme : $y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi)$ ; $y_m$ et $\varphi$ sont les solutions du système d'équations $\begin{cases} y_m \sin\varphi = y_0 \\ \omega y_m \cos\varphi = \dot{y}_0 \end{cases}$

Ici, $y_0 = a$ et $\dot{y}_0 = 0$ ; ce qui entraine $\begin{cases} y_m \sin\varphi = a \ (1) \\ \omega y_m \cos\varphi = 0 \ (2) \end{cases}$

D'après la relation (2), $\cos\varphi = 0$ ; on a donc $\varphi = \frac{\pi}{2}\ ou - \frac{\pi}{2}$ rad. Comme $\sin\varphi > 0$ d'après la relation (1), alors $\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{2}}$ **rad.** En remplaçant cette réponse dans la relation (1), on trouve $y_m = a$.

D'où l'équation horaire : $\boldsymbol{y(t) = a\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}$

**Remarque**

Si à l'instant initial le solide était lancé avec une vitesse $\boldsymbol{v_0}$, le système d'équations permettant de trouver $\boldsymbol{y_m}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ serait : $\begin{cases} y_m \sin\varphi = a \ (1) \\ \omega y_m \cos\varphi = v_0 \ (2) \end{cases}$

On trouve $\boldsymbol{\varphi}$ en faisant le rapport $\frac{(1)}{(2)}$. On obtient $\tan\varphi = \frac{a\omega}{v_0}$ ; ce qui donne $\boldsymbol{\varphi = \tan^{-1}(\frac{a\omega}{v_0})}$.

On calcule ensuite la valeur de $\boldsymbol{y_m}$ en remplaçant la valeur de $\boldsymbol{\varphi}$ dans **la relation (1).**

**a) Période du mouvement**

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. D'où la relation

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

### I.3. Etude énergétique

Considérons le système mécanique précédent. On veut déterminer l'équation différentielle du mouvement par la méthode énergétique. Pour cela on procédera de la manière suivante :

- Montrer que le système conservatif ;
- Déterminer l'expression de l'énergie mécanique du système ;
- Trouver l'équation différentielle à partir de la dérivée de l'énergie mécanique.

On choisit comme système, l'ensemble **solide-ressort-Terre**.

**a) Le système est conservatif**

Etude dans le référentielle terrestre supposé galiléen.
Système : solide-ressort-Terre
Forces extérieures : néant.
Forces intérieures conservatives : $\boldsymbol{\vec{P}\ ;\vec{T}}$.
Forces intérieures non conservatives : néant
Appliquons le théorème de l'énergie mécanique entre deux états quelconques (1) et (2) du système ; on trouve :

$\mathrm{E_{M_2} - E_{M_1} = \sum W_{1\to2}^{(\vec{f}_{int_{nc}})} + \sum W_{1\to2}^{(\vec{F}_{ext})}}$ ; avec $\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{int_{nc}}}$une force intérieure non conservative et $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}}$ une force extérieure. Comme il n'y a ni force intérieure non conservative, ni force extérieure, alors : $\mathrm{\sum W_{1\to2}^{(\vec{f}_{int_{nc}})}} = 0$ et $\mathrm{\sum W_{1\to2}^{(\vec{F}_{ext})}} = 0$. Par conséquent, $\mathrm{E_{M_2} - E_{M_1}} = 0$ ; soit $\mathrm{E_{M_2} = E_{M_1}}$ : l'énergie mécanique est constante ; le système **solide-ressort-Terre** est donc conservatif.

**b) Expression de l'énergie mécanique du système**

$E_M = E_C + E_{PP} + E_{Pe}$, avec $E_C = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$ ;
Si on choisit comme état de référence pour l'énergie potentielle élastique, l'état où le ressort est détendu ; on a :
$E_{Pe} = \frac{1}{2}k(y + \Delta l_0)^2$
Si on choisit comme état de référence, l'état où le solide est dans la position d'équilibre, l'énergie potentielle de pesanteur est : $\boldsymbol{E_{PP} = -mgy}$**.** L'expression de l'énergie mécanique est donc :
$\boldsymbol{E_M = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k(y + \Delta l_0)^2 - mgy}$

**c) Equation différentielle**
Développons l'expression de $E_M$ ; on a :
$E_M = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 + ky\Delta l_0 + \frac{1}{2}k\Delta {l_0}^2 - mgy$. On a vu que $mg - k\Delta l_0 = 0$
$\Longrightarrow\ mgy - ky\Delta l_0 = 0$. D'où l'expression simplifiée : $E_M = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}k\Delta {l_0}^2$
**Comme l'énergie mécanique est constante, sa dérivée est nulle ;** $\boldsymbol{\frac{dE_M}{dt} = 0.}$
$\frac{dE_M}{dt} = m\dot{y}\ddot{y} + ky\dot{y} \Longrightarrow m\dot{y}\ddot{y} + ky\dot{y} = 0$
$\Longrightarrow m\dot{y}(\ddot{y} + \frac{k}{m}y) = 0$ ; $m\dot{y} \neq 0$
$\Longrightarrow\ \boldsymbol{\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0}$

* **Expression de l'énergie mécanique en fonction de l'amplitude.**

Remplaçons $\boldsymbol{y}$ par $\boldsymbol{y_m \sin(\omega t + \varphi)}$ et $\boldsymbol{\dot{y}}$ par $\boldsymbol{\omega y_m \cos(\omega t + \varphi)}$ dans l'expression simplifiée de l'énergie mécanique. On obtient :
$E_M = \frac{1}{2}m[\omega y_m \cos(\omega t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}k[y_m \sin(\omega t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}k\Delta {l_0}^2$. Sachant $m\omega^2 = k$, on trouve :
$\boldsymbol{E_M = \frac{1}{2}k{y_m}^2 + \frac{1}{2}k\Delta {l_0}^2}$

## II. Oscillateurs de rotation

### II.1. Mouvement circulaire sinusoïdal :

#### II.1.1. Définition

Le mouvement circulaire sinusoïdal est un mouvement de va-et-vient autour d'une position centrale, suivant un arc de cercle.
**Les points mobiles d'un oscillateur harmonique de rotation sont animés d'un mouvement circulaire sinusoïdal.**

#### II.1.2. Equation horaire

L'équation horaire d'un mouvement circulaire sinusoïdal est de la forme
$\theta(t) = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$ ou $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$ ;
$\boldsymbol{\theta}$ représente l'élongation à l'instant **t** , $\boldsymbol{\theta_m}$ l'élongation maximale ou amplitude, $\boldsymbol{\omega}$ la pulsation (elle s'exprime en rad/s), $\boldsymbol{\varphi}$ la phase à l'origine et $\boldsymbol{\omega t + \varphi}$ la phase à l'instant t.
Les termes $\theta_m$ et $\varphi$ sont les solutions du système d'équations $\begin{cases} \theta_m \sin\varphi = \theta_0 \\ \omega\, \theta_m \cos\varphi = \dot{\theta}_0 \end{cases}$

#### II.1.3. Equation différentielle

Si on dérive deux fois l'équation horaire, on obtient une équation différentielle :
$\dot{\theta} = \omega\theta_m \cos(\omega t + \varphi)$ ; $\ddot{\theta} = -\,\omega\theta_m \sin(\omega t + \varphi)$; soit $\ddot{\theta} = -\,\omega\theta^2$. D'où l'équation différentielle :
$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \omega\theta^2 = 0}$

#### II.1.4. Période du mouvement

La période T est la durée d'une oscillation complète ; elle est définie par la relation :
$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

### II.2. Etude dynamique d'un oscillateur harmonique de rotation

On veut réaliser l'étude du système mécanique constitué d'un disque suspendu par son centre à un fil de torsion. Le disque est écarté de sa position d'équilibre, dans le plan horizontal, d'un angle de $\frac{\pi}{4}$ rad, puis lancé avec une vitesse de $\frac{\pi}{2}$ rad/s. il se met à osciller. On se propose de déterminer :

- L'équation différentielle du mouvement du solide ainsi que la nature du mouvement
- L'équation horaire du mouvement d'un point du solide
- La période des oscillations.

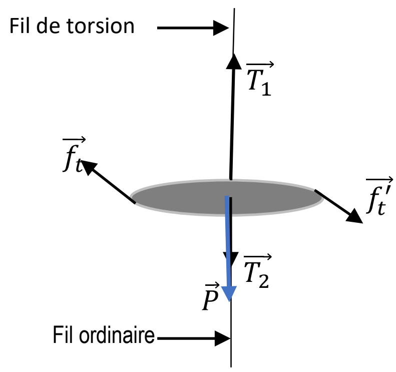
### a) Equation différentielle

Etude dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Système : solide fixé à un fil de torsion
Forces extérieures : couple des forces de torsion $(\vec{f_t}, \vec{f_t'})$ ; poids $\vec{P}$; tension exercée le fil de torsion $\vec{T_1}$ ; tension exercée par le fil ordinaire $\vec{T_2}$.
Théorème de l'accélération angulaire :

$$M_\Delta^{(\vec{P})} + M_\Delta^{(\vec{T_2})} + M_\Delta^{(\vec{T_1})} + M_\Delta^{(\vec{f_t},\vec{f_t'})} = J_\Delta \ddot{\theta}$$

Avec : $M_\Delta^{(\vec{P})} = 0$ ; $M_\Delta^{(\vec{T_2})} = 0$ ; $M_\Delta^{(\vec{T_1})} = 0$ ; $M_\Delta^{(\vec{f_t},\vec{f_t'})} = -C\theta$. Ce qui donne : $-C\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$. Cette relation peut encore s'écrire : $J_\Delta\left(\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta\right) = 0$. Et comme $J_\Delta \neq 0$; il vient :

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0}$$




En posant $\omega^2 = \frac{C}{J_\Delta}$, l'équation différentielle devient $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$ ; c'est l'équation différentielle d'un mouvement circulaire sinusoïdal.
**Conclusion :** *les points mobiles du solide sont animés d'un mouvement circulaire sinusoïdal.*

### b) Equation horaire d'un point en mouvement

Elle est de la forme $\theta(t) = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$ ; avec $\begin{cases} \theta_m \sin\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad } (1) \\ \omega\, \theta_m \cos\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s } (2) \end{cases}$

$\frac{(1)}{(2)} \Longrightarrow \tan\varphi = \frac{\omega}{2} \Longrightarrow \varphi = \tan^{-1}(\frac{\omega}{2})$
On calcule ensuite $\theta_m$ à partir de l'équation (1).

### c) Période du mouvement

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec $\omega = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$ ; ce qui donne

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}}$$

### 1) Etude énergétique

On réalise à présent l'étude du système mécanique du point **II.2** par la méthode énergétique. Pour cela on choisit comme système d'étude, l'ensemble **solide – fil de torsion**. L'étude se fera en suivant les étapes ci-après :
- Montrer que l'énergie mécanique du système **solide – fil de torsion** est conservatif ;
- Déterminer l'expression de l'énergie mécanique du système ;
- Déterminer l'équation différentielle à partir de la dérivée de l'énergie mécanique.

### a) Le système solide – fil de torsion est conservatif.

Etude dans le référentielle terrestre supposé galiléen.
Système : solide – fil de torsion
Forces extérieures : $\vec{P}$; $\vec{T_2}$; $\vec{T_1}$
Forces intérieures conservatives : $(\vec{f_t}, \vec{f_t'})$
Forces intérieures non conservatives : $\vec{T_1}$
Appliquons le théorème de l'énergie mécanique entre deux états quelconques (1) et (2) du système :

$W_{1\to2}^{(\vec{P})} + W_{1\to2}^{(\vec{T_1})} + W_{1\to2}^{(\vec{T_2})} = E_{M_2} - E_{M_1}$. Et comme $W_{1\to2}^{(\vec{P})} = 0$ ; $W_{1\to2}^{(\vec{T_1})} = 0$ et $W_{1\to2}^{(\vec{T_2})} = 0$ , il vient : $E_{M_2} = E_{M_1}$ ; l'énergie mécanique est constante : le système **solide – fil de torsion** est conservatif.

**b) Expression de l'énergie mécanique**

$E_M = E_C + E_P$ avec $E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$ et $E_{Pt} = \frac{1}{2}C\theta^2$, si on prend comme état de référence l'état où le fil est détendu. D'où l'expression : $\boldsymbol{E_M = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2}$

**c) Equation différentielle**

Comme l'énergie mécanique est constante, sa dérivée par rapport au temps est nulle : $\frac{dE_M}{dt} = 0$.

Or $\frac{dE_M}{dt} = J_\Delta\,\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\dot{\theta}\theta = 0$ ; soit : $J_\Delta\dot{\theta}\left(\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta\right) = 0$. Comme $J_\Delta\dot{\theta} \neq 0$ ; l'équation différentielle est donc :

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0}$$

*** Expression de l'énergie mécanique**

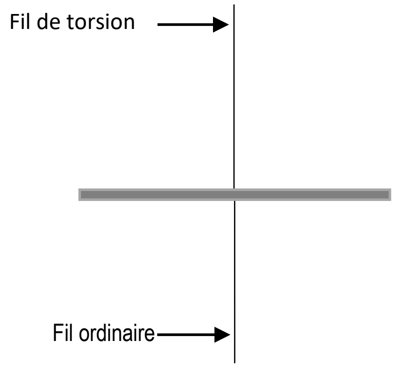
Remplaçons $\theta$ et $\dot{\theta}$ par $\theta_m\sin(\omega t + \varphi)$ et $\omega\theta_m\cos(\omega t + \varphi)$ dans l'expression de l'énergie mécanique, sachant que $J_\Delta\omega^2 = C$. On trouve :

$$\boldsymbol{E_M = \frac{1}{2}C{\theta_m}^2}$$

**Applications**

**Exercice 1**

Le dispositif représenté ci-contre comprend un solide et un ressort à spires non jointives. Le solide **(S)** peut coulisser sans frottements le long de la tige **(T)** qui le traverse de part en part.




Lorsque le ressort est détendu, le centre d'inertie du solide est à l'origine du repère.

On écarte le solide de sa position initiale d'une distance a = 5,0 cm, dans le sens positif, puis on le lâche. Il se met à osciller autour de sa position initiale.

a) Montre par une étude dynamique que les oscillations du solide (S) sont harmoniques.
b) Trouve l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie du solide (S).

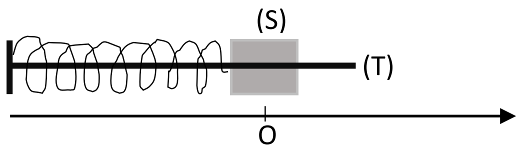
Origine des dates : instant où le solide est lâché après avoir été écarté de sa position initiale.

c) Calcul la période des oscillations.
d) Montre que l'énergie mécanique du système solide-ressort peut se mettre sous la forme $E_M = \frac{1}{2}kx_m^2$ , où $x_m$ est l'amplitude des oscillations.

On donne : masse du solide (S) : m = 0,50 kg ; constante de raideur du ressort : k = 50 N/m.

**Exercice 2**

Une tige homogène de masse M = 1,0 kg et de longueur L = 50 cm est suspendu par son milieu à un fil de torsion de constante de torsion C = 0,42 N.m$^{-1}$.rad$^{-1}$(voir schéma ci-contre). Un autre fil sans torsion, fixé à la tige par l'une des extrémités et au sol par l'autre, empêche le fil de torsion de bouger.




On écarte le solide de sa position d'équilibre d'un angle de $\frac{\pi}{6}$ rad, puis on lance avec une vitesse initiale de $\frac{\pi}{4}$ rad/s. il se met à osciller autour de l'axe verticale confondu avec le fil de torsion

1) Etablis l'équation différentielle du mouvement d'un point mobile de la tige à partir d'une étude énergétique.
2) Trouve l'équation du mouvement.