TITRE DE LA LEÇON : LES GRANDEURS CINEMATIQUES DU MOUVEMENT

Discipline : Sciences physiques

Sous-discipline : Physique

Cycle : Lycée - Niveaux : Terminales C et D

Mécanique
Objectif général 2 : connaitre les principaux mouvements étudiés en cinématique
Objectif spécifique 1 : définir les grandeurs cinématiques du mouvement

La cinématique est l'étude des mouvements des corps sans tenir compte des causes qui les provoquent.

I. Notion de référentiel

Un référentiel est un objet par rapport auquel on étudie le mouvement d'un mobile. Il doit être immobile pour l'observateur.

On associe au référentiel un système de repérage dans le temps, et un système de repérage dans l'espace.

I.1. Repérage dans le temps

Le repérage dans le temps se fait à l'aide d'un appareil de mesure du temps. Il consiste à associer une date **t** à chaque instant du mouvement.

I.2. Repérage dans l'espace

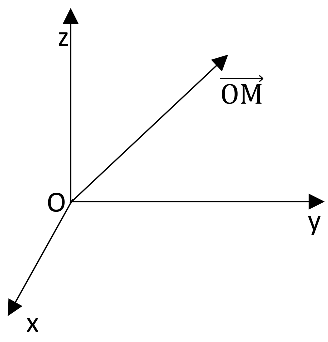
Le repérage dans l'espace se fait à partir du repère orthonormal R **$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.** Il consiste à donner à chaque position du point mobile **M**, les coordonnées cartésiennes **x**, **y** et **z**.

II. Les différentes grandeurs cinématiques du mouvement

II.1. Le vecteur position

Le **vecteur position** ou **rayon vecteur** a pour origine le point O, origine du repère orthonormal R $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, et pour extrémité le point M, position du mobile :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$



x, y et z sont des fonctions du temps. Les expressions **x(t)**, **y(t)** et **z(t)** sont appelées **équations horaires** ou **équations paramétriques** du mouvement. Elles donnent les différentes positions occupées par le mobile pendant le mouvement.

- **Notion de trajectoire**

La trajectoire est la ligne continue qui relie toutes les positions successives occupées par le mobile pendant le mouvement.

Lorsque la trajectoire est une droite, le mouvement est dit rectiligne ; lorsque c'est un cercle ou un arc de cercle, le mouvement est circulaire. Dans tous les autres cas, le mouvement est curviligne.

*On obtient l'équation cartésienne de la trajectoire en éliminant la variable **t** entre les deux équations horaires.*

Exemple 1
Le mouvement du mobile est décrit par les équations horaires ci-après :
$$\begin{cases} x(t) = 2t + 1 \ (1) \\ y(t) = t^2 - 2t \ (2) \\ z(t) = 0 \qquad (3) \end{cases}$$
; avec x, y et z en mètre, et t en seconde.

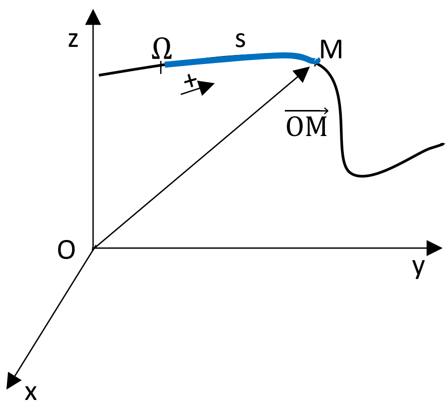
Pour éliminer la variable t entre x(t) et y(t), il suffit d'exprimer t en fonction de x, à partir de l'équation (1), puis de remplacer l'expression obtenue dans l'équation (2).
On a donc : $t = \frac{x-1}{2}$, et $y = (\frac{x-1}{2})^2 - 2(\frac{x-1}{2})$. Ce qui conduit à l'équation :
$$\boldsymbol{y = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 2}$$

Exemple 2
Les équations paramétriques du mouvement d'un mobile sont :
$$\begin{cases} x(t) = 2\cos 3t \\ y(t) = 2\sin 3t \end{cases}$$
; avec t en seconde, x et y en mètre.

Pour éliminer la variable t, il suffit d'additionner les carrés de x et y :
$$\begin{cases} x^2 = 4\cos^2 3t \\ y^2 = 4\sin^2 3t \end{cases}$$
$x^2 + y^2 = 4(\cos^2 3t + \sin^2 3t)$.
Comme $\cos^2 3t + \sin^2 3t = 1$, on obtient l'équation : $\mathbf{x^2 + y^2 = 1.}$

- **Abscisse curviligne**

Lorsque la trajectoire est connue, il existe un autre moyen pour repérer les positions du mobile. Il suffit de choisir une origine Ω sur la trajectoire, et de définir un sens positif. Les positions du mobile sont alors données par la mesure algébrique de l'arc $\widehat{\boldsymbol{\Omega M}}$, appelée **abscisse curviligne**, notée **s** :
$$\mathbf{s = \widehat{\Omega M}}$$
l'expression **s(t)** est aussi appelé équation horaire.



II.2. Le vecteur vitesse

II.2.1. Le vecteur vitesse moyenne

Le vecteur vitesse moyenne du mobile entre les dates t_1 et t_2 ($t_1 > t_2$) est donné par la relation :
$$\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{m}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{OM}}_{\mathbf{2}} - \overrightarrow{\mathbf{OM}}_{\mathbf{1}}}{\mathbf{t_2 - t_1}} = \frac{\Delta\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\mathbf{\Delta t}}$$

Avec $\overrightarrow{\mathbf{OM}}_{\mathbf{1}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{OM}}_{\mathbf{2}}$ les vecteurs positions du mobile aux dates t_1 et t_2. V_m s'exprime en mètre par seconde (m/s ou m.s-1), lorsque t_1 et t_2 sont en seconde, et OM_1 et OM_2 en mètre (m).

NB : la vitesse peut aussi s'exprimer en kilomètre par heure (km/h ou km.h^{-1}) :

$$1 \text{ km/h} = \frac{1}{3{,}6} \text{ m/s}$$

II.2.2. Le vecteur vitesse instantanée

Le vecteur vitesse instantanée à une date **t** quelconque est donné par la relation :
$$\vec{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\mathbf{dt}}$$

Le terme $\frac{\mathbf{d\overrightarrow{OM}}}{\mathbf{dt}}$ est la dérivée du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ par rapport au temps.

- **Expression du vecteur vitesse instantanée dans la base ($\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}$)**

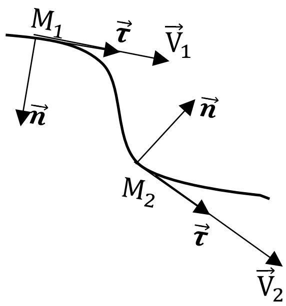
Remplaçons l'expression du vecteur position dans la base **($\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}$)** dans celle de la vitesse instantanée ; on trouve :

$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right) = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dt}}\vec{\boldsymbol{k}}$

Les termes $\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$, $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}}$ et $\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dt}}$ désignent respectivement la dérivée de x par rapport au temps, la dérivée de y par rapport au temps et la dérivée de z par rapport au temps ; on les note encore : $\dot{\boldsymbol{x}}$, $\dot{\boldsymbol{y}}$ et $\dot{\boldsymbol{z}}$.

D'où l'expression : $\vec{\mathbf{V}}\begin{cases} v_x = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \dot{\mathbf{x}} \\ v_y = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}} = \dot{\mathbf{y}} \\ v_z = \frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dt}} = \dot{\mathbf{z}} \end{cases}$

- **Expression du vecteur vitesse instantanée dans la base du repère de Serret-Frenet**



Le repère de **Serret-Frenet,** encore appelé repère de **Frenet,** est un repère mobile, constitué d'une origine et d'une base orthonormée directe ($\vec{\boldsymbol{\tau}}$,$\vec{\boldsymbol{n}}$)**.**
L'origine du repère est la position **M** du mobile. Le vecteur $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ est tangent à la trajectoire au point **M**, orienté dans le sens du mouvement. Le vecteur $\vec{\boldsymbol{n}}$ est orthogonal à $\vec{\boldsymbol{\tau}}$**, orienté vers la concavité**.
L'expression du vecteur vitesse instantanée dans la base de Frenet est donnée par la relation :

$$\vec{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{d}s}{\mathbf{dt}}\vec{\boldsymbol{\tau}}$$

Cette expression montre que **le vecteur vitesse instantanée est tangent à la courbe.**
La norme du vecteur vitesse instantanée est : $V = \left|\frac{ds}{dt}\right|$

II.2. Le vecteur accélération

II.2.1. Le vecteur accélération moyenne

Le vecteur accélération moyenne $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}}$ du mouvement d'un mobile, entre les dates t_1 et t_2 ($t_2 > t_1$), est défini par la relation :

$$\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{m}} = \frac{\vec{\mathbf{V}}_2 - \vec{\mathbf{V}}_1}{\mathbf{t_2 - t_1}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{V}}}{\Delta\mathbf{t}}$$

$\vec{\mathbf{V}}_1$ et $\vec{\mathbf{V}}_2$ sont respectivement les vecteurs vitesses du mobile aux dates t_1 et t_2.
Unité : a_m s'exprime en m.s^{-2} quand V_1 et V_2 sont en m.s^{-1}, et t_1 et t_2 en s.

II.2.2. Le vecteur accélération instantanée

Le vecteur accélération instantanée $\vec{\mathbf{a}}$ à une date **t** quelconque est défini par la relation :

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{V}}}{\mathbf{dt}}\,(\mathbf{1})$$

Avec **a** en m/s^2, **V** en m/s et **t** en s.

Comme $\vec{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{d\overrightarrow{OM}}}{\mathbf{dt}}$, on peut encore écrire : $\vec{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\frac{\mathbf{d\overrightarrow{OM}}}{\mathbf{dt}}\right) = \frac{\mathbf{d^2\overrightarrow{OM}}}{\mathbf{dt^2}}$; soit :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \quad (2)$$

- **Expression du vecteur accélération instantanée dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$**

La relation (1) conduit à l'expression $\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}) = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$, que l'on peut encore présenter sous la forme :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

La relation (2) nous donne : $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$. Les termes $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$ désignent respectivement les dérivées secondes de x, y et z par rapport au temps. On peut les représenter par les symboles $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$. D'où la seconde expression du vecteur accélération instantanée : $\vec{a}\begin{cases} a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{cases}$

- **Expression du vecteur accélération instantanée dans la base dans du repère de Serret-Frenet**

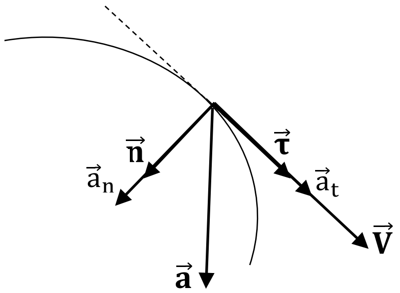
Remplaçons $\vec{V}$ par $\frac{ds}{dt}\vec{\tau}$ dans l'expression (1) ; on trouve :

$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{n}$; avec ρ, *le rayon de courbure* ; c'est le rayon du cercle tangent à la courbe au point **M.**

Or $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\left|\frac{ds}{dt}\right|\right)^2 = V^2$.

Ainsi : $\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}$.

Autre présentation : $\vec{a}\begin{cases} a_t = \dfrac{d^2s}{dt^2} \\ a_n = \dfrac{V^2}{\rho} \end{cases}$



Les termes $a_t = \frac{d^2s}{dt^2}$ et $a_n = \frac{V^2}{\rho}$ sont respectivement appelés accélération tangentielle et accélération normale du mouvement du mobile.

Application des connaissances

Exercice 1

Le mouvement d'un mobile est décrit par les équations paramétriques ci-après :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t + 1 \\ y(t) = 1 \\ z(t) = 1 \end{cases} \qquad (t \text{ en s; } x, y \text{ et } z \text{ en m})$$

1. Détermine les composantes et la norme du vecteur
   a. vitesse instantanée ;
   b. accélération instantanée.

2. Trouve l'expression en fonction du temps de l'abscisse curviligne s = $\widehat{M_0M}$, où M est la position du mobile à un instant t quelconque. Tu prendras comme origine sur la trajectoire, le point M_0 position du mobile à la date t = 0, et pour sens positive celui du mouvement.

Exercice 2

On considère un point mobile dont les équations horaires sont données ci-après :

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos 3t + 1 \\ y(t) = 4\sin 3t \end{cases} \qquad (\text{avec t en s, x et y en m})$$

1. Trouve l'équation cartésienne de la trajectoire.
2. Détermine l'expression en fonction du temps de l'abscisse curviligne s = $\widehat{M_0M}$, où M est la position du mobile à un instant t quelconque, et M_0 la position du mobile à la date t =0. Tu prendras comme sens positif, le sens du mouvement.
3. On considère la base $(\vec{\tau}, \vec{n})$, où $\vec{\tau}$ est le vecteur tangent à la trajectoire au point M, et $\vec{n}$ le vecteur perpendiculaire à $\vec{\tau}$ et orienté vers le centre de courbure.

Détermine dans la base $(\vec{\tau}, \vec{n})$, les composantes et la norme du vecteur

a) vitesse instantanée ;
b) accélération instantanée.