TITRE DE LA LEÇON : FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Analyse
Niveau : Lycée - Classes : Terminales C et D

1- **Définition** : On appelle fonction exponentielle de base e, notée : **exp**, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien,: $\begin{array}{c}\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \exp(x) = e^x\end{array}$

2- **Propriétés :**

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$; $e^x > x$; $\ln e^x = x$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$
- $e^{nx} = (e^x)^n$; $e^{x+y} = e^x . e^y$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$; $e^x > a \Leftrightarrow x > \ln a$; $e^x < a \Leftrightarrow x < \ln a$

3- **Quelques conditions d'existence des fonctions composées avec exp**

Fonction	e^u ; $e^{\lvert u \rvert}$	$e^{\frac{1}{u}}$	$\frac{1}{e^u + a}$	$e^{\sqrt{u}}$
Condition	Définie dans IR	$u \neq 0$	$e^u + a \neq 0$	$u \geq 0$

U : est une fonction polynôme et a un nombre réel.

4- **Limites fondamentales ou de références ou limites classiques**

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{\alpha} e^x = 0$; $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty$; $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$

5- **Dérivée** :

Si u est une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, e^u est alors est dérivable sur I et : $(e^u)' = u'e^u$

Remarques

- ✓ Une fonction exponentielle de base a, notée : $\boldsymbol{exp_a}$, la bijection réciproque de la fonction logarithme de base a : $\begin{array}{c}exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}\end{array}$; $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$
- ✓ Une fonction f qui à tout réel strictement positif x, associe le réel strictement positif x^{α}, est appelée : Fonction puissance : $\begin{array}{c}f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto f(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}\end{array}$; $\alpha \in \mathbb{R}$
- ✓ **Croissances comparées de certaines fonctions** : Au voisinage de $+\infty$, la fonction exponentielle croit plus vite que la fonction puissance, la fonction puissance croit plus vite que la fonction logarithme. On a donc les résultats suivants : Pour tout réel α strictement positif $(\alpha > 0)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\propto}=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\propto}=0$$

✓ **Conséquences de la croissance comparée :**

$$\lim_{x\to0^+} x^\propto \ln x=0\,;\ \lim_{x\to+\infty} x^\propto e^{-x}=0\,;\ \lim_{x\to-\infty} x^\propto e^{x}=0\ ;\ \lim_{x\to-\infty} P(x)e^{x}=0;\quad P(x): polynôme$$

Exercice 1

1- Soit la fonction numérique f définie sur IR par : $f(x)=-e^{-2x}+2e^{-x}$.

On désigne par (**C**) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$), unité : 2 cm. a) On admet que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Etudier le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Tracer la coube (C) de f.

2- Soit la fonction h définie sur IR par : $h(x)=-f(x)$.

a) Tracer la courbe (Γ) de h dans le même repère que (C) .

b) Calculer l'aire A da la partie du plan délimitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations: $x=-\ln 2$ et $x=1$.

Exercice 2

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = xe^{\frac{\ln x}{x}} \quad ; \quad x>0 \end{cases}$$

1-a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0.

b) Calcule la limite de f au voisinage $+\infty$

2-Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x)=x+1-\ln x$.

a) Dresse le tableau de variation de g sur $[0;+\infty[$

b) En déduire que, pour tout $\in[0;+\infty[$, $g(x)>0$

3- a) Prouve que : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}e^{\frac{\ln x}{x}}$; où f' désigne la fonction dérivé de f.

b) En déduire le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$

4-a) Justifie que $\lim_{X\to0}\frac{e^X-1}{X}=1$.

b)Etudie la branche infinie de la courbe (C) de f .

5-On admet que $A(1\,;1)$, est un point d'inflexion de la courbe (C), détermine l'équation de la tangente (T) en A à la courbe (C).

6-Construis la courbe (C) .On représentera les points d'abscisses 2 et $\frac{1}{2}$.