

TITRE DE LA LEÇON : GENERALITES SUR LES SUITES NUMERIQUES

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Analyse

Niveau : Lycée - Classes : Terminales C et D

1. Définition :

On appelle suite numérique, toute fonction de \mathbb{N} (ou d'une partie de \mathbb{N}) vers \mathbb{R} .

On note (U_n) : la suite de terme général U_n ; avec $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : D'une manière générale, une suite numérique se présente sous deux formules : la formule explicite (le terme général en fonction de n) et la formule de récurrence. (le terme général est lié à un terme qui lui est consécutif)

Exemple : $U_n = \frac{2n}{n+1}$: (U_n) est définie sous la formule explicite et $\begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n - 2 \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}^*$: (v_n) est définie par une formule de récurrence.

2. Minoration ; majoration

- (U_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $U_n \geq m$
- (U_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $U_n \leq M$
- (U_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée

3. Sens de variation :

- Si $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n \geq 0$; alors la suite (U_n) est croissante.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n \leq 0$; alors la suite (U_n) est décroissante.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = 0$; alors la suite (U_n) est constante.

4. Convergence :

- Une suite (u_n) est convergente, si elle admet une limite finie ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$; $l \in \mathbb{R}$)
- Toute suite convergente admet une limite unique ; toute suite convergente , est bornée.
- Toute suite croissante et majorée, est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée ,est convergente.
- Si la suite n'est pas convergente ; alors elle est divergente.
- Une suite (u_n) est divergente, si elle admet une limite infinie ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$) ou bien elle n'a pas de limite: ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$; $l \in \mathbb{R}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l'$; $l' \in \mathbb{R}$ et $l \neq l'$)
- Toute suite croissante et non majorée, est divergente (sa limite est $+\infty$)
- Toute suite décroissante et non minorée, est divergente (sa limite est $-\infty$)

5. Suites périodiques, suites adjacentes

- Une suite (u_n) est périodique, s'il existe un entier naturel non nul p , tel que :
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$; p : est la période de la suite (u_n) .
- Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, si et seulement si, l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

6. Raisonnement par récurrence : Principe du raisonnement

Soit $P(n)$ une propriété (supposée vraie), pour démontrer par récurrence que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n :

- On vérifie que $P(n)$ est vraie au rang initial, c.à.d. pour la plus petite valeur possible n_0 de n , $P(n_0)$ est vraie (initialisation) ;
- On suppose que $P(k)$ est vraie pour tout entier $k \leq n$ (ou $k \geq n_0$) (Hypothèse de récurrence)
- On démontre que $P(k + 1)$ est vraie (hérédité) ;
- On conclut si $P(k + 1)$ est vraie, que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel.

Exercice : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n > n$

Solution

Vérifions pour $n_0 = 1$, $P(1)$: $2^1 > 1 \Rightarrow 2 > 1$ vraie

Supposons $P(k)$ est vraie $2^k > k$. Hypothèse de récurrence.

Montrons que $P(k + 1)$ est vraie, c-à-d : $2^{k+1} > k+1$

Or $2^k > k$, on multiplie par 2, on a : $2^k \cdot 2 > 2k$. On sait que $k \in \mathbb{N}^*$ d'où $k > 1$. Additionnons k membre à membre, on a : $k + k \geq k + 1 \Rightarrow 2k \geq k + 1$. On a donc $2^{k+1} > k+1$. On conclut que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie : $2^n > n$

Exercice1 : Soit : $S_n = \sum_{i=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Démontrer par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice2 :

1- Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

2- Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

a) Calculer en fonction de n , la somme $S_n = \sum_{i=0}^n v_i$.

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

3- Soient (X_n) et (Y_n) deux suites telles que : $n \in \mathbb{N}^*$ $X_n = 1 + \frac{1}{1^2 \times 2^2} + \frac{1}{2^2 \times 3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2 \times n^2}$ et

$Y_n = X_n + \frac{1}{3n^3}$. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice3 Soient deux suites (U_n) et (V_n) , à termes strictement positifs, définies par : $0 < U_0 < V_0$ et

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}$; $V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$.

1) Calculer $V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$.

2) Démontrer que (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

3) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)$

En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. Que peut-on dire des suites (U_n) et (V_n) ?