TITRE DE LA LEÇON : ELEMENTS D'ETUDE D'UNE FONCTION NUMERIQUE
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Analyse
Niveau : Lycée - Classes : Terminales C et D

I-ENSEMBLE DE DEFINITION D'UNE FONCTION NUMERIQUE

- **Rappel : Définitions :**

— Une fonction numérique, est une fonction dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$

— Une fonction numérique à variable réelle, est une fonction dont l'ensemble de départ $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ et l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.

— L'ensemble de définition d'une fonction f de E dans F, est l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ E qui ont une image unique par f dans l'ensemble d'arrivée F.

- **Conditions d'existence des fonctions numériques usuelles**

Soient p et q deux fonctions polynômes

Fonction numérique f à variable réelle :	Conditions d'existence :
$f(x)=p(x)$ ou $f(x)=\|p(x)\|$	f est définie sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$	f est définie si et seulement si $q(x)\neq 0$
$f(x)=\sqrt{p(x)}$	f est définie si et seulement si $p(x)\geq 0$
$f(x)=\sqrt{\dfrac{p(x)}{q(x)}}$	f est définie si et seulement si $\frac{p(x)}{q(x)}\geq 0$ et $q(x)\neq 0$
$f(x)=\dfrac{\sqrt{p(x)}}{\sqrt{q(x)}}$	f est définie si et seulement si $p(x)\geq 0$ et $q(x)>0$
$f(x)=\dfrac{\sqrt{p(x)}}{q(x)}$	f est définie si et seulement si $p(x)\geq 0$ et $q(x)\neq 0$
$f(x)=\dfrac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}$	f est définie si et seulement si $q(x)>0$

Exercice : Déterminer l'ensemble de chacun des fonctions suivantes :

$t(x)=3x^4+2x+6$; $g(x)=\sqrt{x+1}$; $h(x)=\sqrt{|x+2|-2}$;

$k(x)=\frac{x}{(x+3)(x-1)}$; $l(x)=x+5+\sqrt{2x+4}$;

$m(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$; $p(x)=\frac{\sqrt{x}}{x(x+3)}$; $q(x)=\sqrt{|1+x^2|}$; $\begin{cases} f(x)=-x+4-\frac{1}{x-1}; si\ x\leq 0 \\ f(x)=\frac{3x-5}{x^2+1};\quad si\ x>0 \end{cases}$;

II- LIMITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se lit : limite de f(x) quand x tend vers x_0.

1- Limites usuelles : Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel a, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty\,;\ \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0;\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty, \text{si } n \text{ est impair} \end{cases};\ \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2};\ \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty\,;$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty, \text{si } n \text{ est impair} \end{cases};\ \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0;\ \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty;$$

2- Opérations sur les limites.

Soient l et l' deux réels non nuls, limites respectives de deux fonctions f et g. On a le tableau suivant.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0	0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x)$	$l \times l'$	∞		$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	F.I	0
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	∞		F.I			∞	0	F.I

Remarques :

- $+\infty \times l = \begin{cases} +\infty, \text{si } l > 0 \\ -\infty, \text{si } l < 0 \end{cases}$.
- Les résultats de la forme " $\infty - \infty$", "$\infty \times 0$", " $\frac{\infty}{\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ " ne sont pas connus à priori ; ce sont des formes indéterminées (F.I). Pour lever l'indétermination, on peut envisager la *factorisation* puis la *simplification,* la *conjugaison (expression conjuguée)* ou le *changement de variable.*

Exercice1 Calcule les limites suivantes : $a)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^3 + 7x + 4)$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2+2x}{x-1}\right)$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{2x^2-2x}{x-1}\right)$

Solution : $a)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^3 + 7x + 4) = \lim\limits_{x \to -\infty} -5x^3 = +\infty$ ou bien

$$\lim_{x \to -\infty} (-5x^3 + 7x + 4) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(-5 + \frac{7}{x^2} + \frac{4}{x^3} = +\infty\right)$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2+2x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$; ou bien

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 + 2x}{x - 1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{-1}{1+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-2x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}2x = 2$

Exercice2 : Calculer la limite de la fonction f au point indiqué, dans chacun des cas suivants :

$f(x) = \frac{x^3-7x+6}{2x^2+3x-10}$; $x_o = 2$; $f(x) = \frac{x^2-x+1}{2x^3+x+2}, x_o = -\infty$; $f(x) = \left(\sqrt{x^2+3x-2} + x\right), x_o = -\infty$;

$f(x) = \left(x - \sqrt{x^2+1}\right), x_o = +\infty$; $f(x) = \left(\sqrt{3-x} - \sqrt{2-x}\right), x_o = -\infty$

$f(x) = \frac{x^2-x-1}{x-2}, x_o = 2^-$; $f(x) = \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}, x_o = 2$; $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}, x_o = -\infty$;

$f(x) = \frac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}}, x_o = 3$; $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}, x_o = 0$; $f(x) = \frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}, x_o = \frac{\pi}{4}$;

$f(x) = \frac{3x^3+3x^2-15x+9}{2x^3-5x^2+4x-1}, x_o = 1$; $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3\right), x_o = 0$; $f(x) = \frac{1+\cos x}{(x-\pi)\sin x}, x_o = \pi$; $f(x) = \frac{1-2\mathrm{Sin}^2 x}{1+\cos 4x}, x_o = \frac{\pi}{4}$; $f(x) = \frac{x+\sin x}{3-\sin x}, x_o = +\infty$.

III- CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

1- Continuité en un point d'abscisse x_0

f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe (f est définie en x_0) et $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2- Continuité à gauche et à droite

- f est continue à gauche de x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- f est continue à droite de x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Conséquence : f est continue en x_0 si et seulement si : $\begin{cases} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

3-Prolongement par continuité : Soient f une fonction non définie en x_0 et l un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = l$, alors on peut prolonger f par continuité telle que : $\begin{cases} g(x) = f(x) \,;\, x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$

La fonction g ainsi obtenue, est appelée : Prolongement par continuité de f en x_0 .

Remarque : $E_g = E_f \cup \{x_0\}$

Exerccice1 On considère la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{|1-x^2|}$. Etudier la continuité de g en $x_0 = 1$.

Solution :

- g est définie$\Leftrightarrow$ $|1-x^2| \geq 0$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}, |1-x^2| \geq 0$. Donc $E_g =]-\infty; +\infty[$;
- $g(1) = \sqrt{|1-1^2|} = 0$
- $\begin{cases} g(x) = \sqrt{x^2-1} \,;\, si\ x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\\ g(x) = \sqrt{1-x^2}; \quad si\ x \in [-1;1] \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \sqrt{x^2-1} = 0$;

· $\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^+} g(x) = g(1)$, alors g est continue en $x_0 = 1$.

Exerccice2 On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1};\, si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3x-5}{x^2+1};\quad si\ x > 0 \end{cases}$;

1- Déterminer l'ensemble de définition E_f de f, puis calculer les limites aux bornes de E_f .

2- Etudier la continuité de f au point d'abscisse $x_0 = 0$, puis en déduire l'ensemble de continuité de f.

IV- DERIVATION

1- Dérivabilité en un point d'abscisse x_0.

- f est dérivable en si et seulement si : $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l\ (l \in \mathbb{R})$.

NB Le réel ℓ (fini) est appelé nombre dérivé de f en x_0, noté $f'(x_0)$ on écrit :$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

- **Conséquences graphique :**

Si f est dérivable en x_0, le graphique (ou la courbe) de f admet une tangente au point $\mathrm{M_o}(x_0; f(x_0))$, de coefficient directeur $f'(x_0)$:

1er cas : si $f'(x_0) = 0$, alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses (Ox).

2e cas : si $f'(x_0) = l \neq 0$, alors cette tangente a pour équation : $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.

3e cas : si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, alors la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées (Oy).

2- Dérivabilité à gauche et à droite de x_0

- f est dérivable à gauche de x_o si et seulement si :
  $f'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l;\ (l \in \mathbb{R})$.
- f est dérivable à droite de x_o si et seulement si :
  $f'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l'\ (l' \in \mathbb{R})$.

Remarques :

- Si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_o.
- Si $f'_g(x_0) = \ell \neq f'_d(x_0) = \ell'; l, l' \in \mathbb{R}$ alors f n'est pas dérivable en x_o.
- Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0.

3- Dérivabilité sur un intervalle.

f définie sur I=$]a, b[$, f est dérivable sur $]a, b[$
Si elle dérivable en chaque point de cet intervalle.

Conséquence : f est dérivable sur $[a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f \text{ est dérivable à droite a et à gauche de b} \end{cases}$

NB : Toute fonction dérivable est continue mais, toute fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

4- Calculs des dérivées

Fonction f	$u+v$	uv	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	$\frac{1}{u}$	$\tan U$	$\cot u$
Dérivée f'	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$\frac{u'v-uv'}{V^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$nu'u^{n-1}$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{U'}{\cos^2 U}$	$\frac{-u'}{\text{Sin}^2 u}$

N.B : $f' \circ f^{-1}$: (lire : f' rond f moins 1) est la composée de f^{-1} suivie de f'. Si f^{-1} est dérivable, on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$.

Exerccice On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1}; si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3x-5}{x^2+1}; \quad si\ x > 0 \end{cases}$;

1- Déterminer l'ensemble de définition E_f de f, puis calculer les limites aux bornes de E_f .
2- Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 0$, puis en déduire une interprétation géométrique.
3- Calculer la dérivée de f sur chacun des intervalles où f est dérivable.
4- Dresser le tableau de variation de f.

V- BRANCHES INFINIES ET COURBES DES FONCTIONS ASSOCIEES AUX FONCTIONS DONNEES

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- Branches infinies : Soit f une fonction définie sur : $E_f =]-\infty; x_0[\cup]x_0; +\infty[$

si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$,	Alors la droite d'équation : $x = x_0$ est une asymptote « verticale » à la courbe (C) de f	
si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0$	Alors la droite d'équation : $y = y_0$ est une asymptote « horizontale » à la courbe (C) de f au voisinage de $\pm\infty$	
	$\begin{cases} \text{si} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a; a \in \mathbb{R}^* \\ \text{et} \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax] = b; b \in \mathbb{R} \end{cases}$	Alors la droite d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote

		« oblique» à la courbe (C) de f au voisinage de ∞
si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et	$\begin{cases} \text{si } \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a; a \in \mathbb{R}^* \\ \text{et } \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax] = \infty \end{cases}$	Alors la droite d'équation : $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe (C) de f au voisinage de ∞ ou (C) admet une branche parabolique de direction : $y = ax$
	si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$	Alors la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de ∞
	si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$	Alors la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de ∞

Remarque

-Pour montrer que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de ∞, on montre que : $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$.

-Pour étudier la position de (C) par rapport à (D), on étudie le signe de :
$f(x) - y = f(x) - (ax + b)$

- ✓ Si $(x) - y < 0$, alors (C) est en dessous de (D) ;
- ✓ Si $(x) - y > 0$, alors (C) est au-dessous de (D) ;
- ✓ Si $(x) - y = 0$, alors (C) et (D) se coupent en un point.

2- Courbes des fonctions associées aux fonctions données

Soient f et g deux fonctions de courbes représentatives respectives : (C_f) et (C_g).

- Si $g(x) = -f(x)$, alors (C_f) et (C_g) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ;

  Si $g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \geq 0 : (C_f) = (C_g). \\ -f(x) & si \quad f(x) \leq 0 \end{cases}$,

- Si $g(x) = f(-x)$, alors (C_f) et (C_g) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ;

  Si $g(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \geq 0 : (C_f) = (C_g). \\ f(-x) & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

— Si $g(x) = -f(-x)$, alors (C_f) et (C_g) sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

— Si $g(x) = f(x - \alpha) + \beta$; $(\alpha , \beta: réels)$, alors (C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteurs : $\vec{u} = \alpha \vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$;

— Si $g(x) = kf\left(\frac{1}{k}x\right)$; $(k: réel\ non\ nul)$, alors (C_g) est l'image de (C_f) par l'homothétie de centre $O(0; 0)$ et de rapport k

— Si $g(x) = kf(x)$; ou $g(x) = f(kx)$; $(k: réel\ non\ nul)$, alors (C_g) est l'image de (C_f) par l'affinité orthogonale, de rapport k et d'axes respectifs (Ox) et (Oy).

— Si $g(x) = kf(x - \alpha) + \beta$; $(\alpha , \beta: réels)$, alors (C_g) est l'image de (C_f) par la composée d'une translation et d'une affinité orthogonale, d'axe (Ox) et de rapport k