

TITRE DE LA LEÇON : FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Analyse

Niveau : Lycée

-

Classes : Terminales C et D

1- **Définition** : On appelle fonction exponentielle de base e, notée : **exp**, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien, : $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$
 $x \mapsto \exp(x) = e^x$

2- Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0; e^x > x; \ln e^x = x$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$
- $e^{nx} = (e^x)^n; e^{x+y} = e^x \cdot e^y; e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b; e^a > e^b \Leftrightarrow a > b; e^x > a \Leftrightarrow x > \ln a; e^x < a \Leftrightarrow x < \ln a$

3- Quelques conditions d'existence des fonctions composées avec exp

Fonction	$e^u; e^{ u }$	$\frac{1}{e^u}$	$\frac{1}{e^u + a}$	$e^{\sqrt{u}}$
Condition	Définie dans IR	$u \neq 0$	$e^u + a \neq 0$	$u \geq 0$

U : est une fonction polynôme et a un nombre réel.

4- Limites fondamentales ou de références ou limites classiques

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty;$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0; \alpha \in \mathbb{R}_+^*$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty; \alpha \in \mathbb{R}_+^*$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$

5- Dérivée :

Si u est une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, e^u est alors est dérivable sur I et : $(e^u)' = u' e^u$

Remarques

- ✓ Une fonction exponentielle de base a, notée : **exp_a**, la bijection réciproque de la fonction logarithme de base a : $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$
 $x \mapsto \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}; a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$
- ✓ Une fonction f qui à tout réel strictement positif x, associe le réel strictement positif x^α , est appelée : Fonction puissance : $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$
 $x \mapsto f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}; \alpha \in \mathbb{R}$
- ✓ **Croissances comparées de certaines fonctions** : Au voisinage de $+\infty$, la fonction exponentielle croit plus vite que la fonction puissance, la fonction puissance



croit plus vite que la fonction logarithme. On a donc les résultats suivants : Pour tout réel α strictement positif ($\alpha > 0$),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

✓ **Conséquences de la croissance comparée :**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)e^x = 0; P(x): \text{polynôme}$$

Exercice 1

1- Soit la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -e^{-2x} + 2e^{-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , unité : 2 cm. a) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

- b) Etudier le sens de variation de f .
 - c) Dresser le tableau de variation de f .
 - d) Tracer la courbe (C) de f .
- 2- Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = -f(x)$.
- a) Tracer la courbe (Γ) de h dans le même repère que (C).
 - b) Calculer l'aire A de la partie du plan délimitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations: $x = -\ln 2$ et $x = 1$.

Exercice 2

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x e^{\frac{\ln x}{x}}; \quad x > 0 \end{cases}$$

- 1-a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0.
 - b) Calcule la limite de f au voisinage $+\infty$
- 2- Soit la fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $g(x) = x + 1 - \ln x$.
- a) Dresse le tableau de variation de g sur $[0; +\infty[$
 - b) En déduire que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g(x) > 0$
- 3- a) Prouve que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x} e^{\frac{\ln x}{x}}$; où f' désigne la fonction dérivée de f .
- b) En déduire le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$
- 4-a) Justifie que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
- b) Etudie la branche infinie de la courbe (C) de f .
- 5- On admet que $A(1; 1)$, est un point d'inflexion de la courbe (C), détermine l'équation de la tangente (T) en A à la courbe (C).
- 6- Construis la courbe (C). On représentera les points d'abscisses 2 et $\frac{1}{2}$.