TITRE DE LA LEÇON : GENERALITES SUR LES SUITES NUMERIQUES
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Analyse
Niveau : Lycée - Classes : Terminales C et D

1. **Définition :**

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.
On note (U_n) : la suite de terme général U_n ; avec $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : D'une manière générale, une suite numérique se présente sous deux formules : la formule explicite (le terme général en fonction de n) et la formule de récurrence.((le terme général est lié à un terme qui lui est consécutif)

Exemple : : $U_n = \frac{2n}{n+1}$: (U_n) est définie sous la formule explicite et $\begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n - 2 \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}^*$: (v_n) est définie par une formule de récurrence.

2. **Minoration ; majoration**
   - (U_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $U_n \geq m$
   - (U_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $U_n \leq M$
   - (U_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée

3. **Sens de variation :**
   - Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n \geq 0$; alors la suite (U_n) est croissante.
   - Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n \leq$; alors la suite (U_n) est décroissante.
   - Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = 0$; alors la suite (U_n) est constante.

4. **Convergence :**
   - Une suite (u_n) est convergente, si elle admet une limite finie ($\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l; l \in \mathbb{R}$)
   - Toute suite convergente admet une limite unique ; toute suite convergente , est bornée.
   - Toute suite croissante et majorée, est convergente.
   - Toute suite décroissante et minorée ,est convergente.
   - Si la suite n'est pas convergente ; alors elle est divergente.
   - Une suite (u_n) est divergente, si elle admet une limite infinie ($\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$) ou bien elle n'a pas de limite: ($\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l; l \in \mathbb{R}; \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l'; l' \in \mathbb{R}\ et\ l \neq l'$)
   - Toute suite croissante et non majorée, est divergente (sa limite est $+\infty$)
   - Toute suite décroissante et non minorée, est divergente (sa limite est $-\infty$)

5. **Suites périodiques, suites adjacentes**
   - Une suite (u_n) est périodique, s'il existe un entier naturel non nul p, tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n; p$: est la période de la suite (u_n).
   - Deux suites (u_n) et (v_n)sont adjacentes, si et seulement si, l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

6. Raisonnement par récurrence : Principe du raisonnement

Soit $P(n)$ une propriété (supposée vrai), pour démontrer par récurrence que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n :

- On vérifie que $P(n)$ est vraie au rang initial, c.à.d. pour la plus petite valeur possible n_0 de n, $P(n_0)$ est vraie (initialisation) ;
- On suppose que $P(k)$ est vraie pour tout entier $k \leq n$ (ou $k \geq n_0$) (Hypothèse de récurrence)
- On démontre que $P(k+1)$ est vraie (hérédité) ;
- On conclut si $P(k+1)$ est vraie, que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel.

Exercice 1 : Démontrer par récurrence que $\forall\, n\epsilon\ \mathbb{N}^*,\ 2^n > n$

Solution

Vérifions pour $n_0 = 1$, P(1): $2^1 > 1 \quad \Rightarrow 2 > 1$ vraie

Supposons $P(k)$ est vraie $2^k > k$. Hypothèse de récurrence.

Montrons que $P(k+1)$ est vraie, c-à-d : $2^{k+1} > k$+1

Or $2^k > k$, on multiplie par 2, on a: $2^k.2 > 2k$. On sait que kϵN^* d'où $k > 1$. Additionnons k membre à membre, on a : $k + k \geq k + 1 \Rightarrow 2k \geq k + 1$ On a donc $2^{k+1} > k$+1. On conclut que : $\forall\, n\epsilon\ N,\ P(n)$ est vraie : $2^n > n$

Exercice1 : Soit : $S_n = \sum_{i=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
Démontrer par récurrence, $\forall\, n\epsilon\mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice2 :

1- Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$ .Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2- Soit la suite (v_n) définie pour tout n∈ ℕ par : $v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

a) Calculer en fonction de n ,la somme $S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

3- Soient (X_n) et (Y_n) deux suites telles que : n∈ ℕ* X_n= 1+ $\frac{1}{1^2\times2^2} + \frac{1}{2^2\times3^2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2\times n^2}$ et

$Y_n = X_n + \frac{1}{3n^3}$. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice3 Soient deux suites (U_n) et (V_n), à termes strictement positifs, définies par :
$0 < U_O < V_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}$; $\quad V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$.

1) Calculer ${V_{n+1}}^2 - {U_{n+1}}^2$. En déduire que pour tout n∈ ℕ, $U_n \leq V_n$.
2) Démontrer que (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.
3) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)$

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. Que peut- on dire des suites (U_n) et (V_n)?