TITRE DE LA LEÇON : BARYCENTRES DE n POINTS PONDERES
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Géométrie
Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

1- Définition

Soit $\{(A_1;\alpha_1),(A_2;\alpha_2),\dots,(A_n;\alpha_n)\}$ un système de n points pondérés tels que :

On appelle barycentre des points pondérés :$(A_1;\alpha_1),(A_2;\alpha_2),\dots,(A_n;\alpha_n)$, l'unique point G du plan ou de l'espace tel que : $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\ \alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\ \alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\ \vec{0}$ et $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n\neq 0$.

On note : $G=bar\{(A_1;\alpha_1),(A_2;\alpha_2),\dots,(A_n;\alpha_n)\}$

NB : Si $\alpha_1=0$, alors $G=bar\{\ (A_2;\alpha_2),\dots,(A_n;\alpha_n)\}$

2- Réduction des sommes : cas du barycentre de trois ou quatre points pondérés

Exemple : Soit $G=bar\{(A;3),(B;1),(C;1)\}$. Montrons que : $3\overrightarrow{MA}+\ \overrightarrow{MB}+\ \overrightarrow{MC}=5\ \overrightarrow{MG}$

$G=bar\{(A;3),(B;1),(C;1)\}$, alors $3\overrightarrow{GA}+\ \overrightarrow{GB}+\ \overrightarrow{GC}=\ \ \vec{0}$

On a $3\overrightarrow{MA}+\ \overrightarrow{MB}+\ \overrightarrow{MC}=3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\ \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)$

$$=5\ \overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{GA}+\ \overrightarrow{GB}+\ \overrightarrow{GC}=\ 5\ \overrightarrow{MG}+\ \vec{0}$$

D'où $3\overrightarrow{MA}+\ \overrightarrow{MB}+\ \overrightarrow{MC}=5\ \overrightarrow{MG}$

3- Coordonnées du barycentre de trois points dans le repère$\left(\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{\imath}},\vec{\boldsymbol{\jmath}},\vec{\boldsymbol{k}}\right)$

Soit $G=bar\{(A;\alpha_1),(B;\alpha_2),(C;\alpha_3)\}$, alors

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha_1x_A+\alpha_2x_B+\alpha_3x_C}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\ y_G=\dfrac{\alpha_1y_A+\alpha_2y_B+\alpha_3y_C}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\\ z_G=\dfrac{\alpha_1z_A+\alpha_2z_B+\alpha_3z_C}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\end{cases}$$

4- Propriétés du barycentre

a) Homogénéité

Le barycentre de n points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie (ou on divise) tous ses coefficients par un même nombre réel non nul :Soit $G=bar\{(A;\alpha_1),(B;\alpha_2),(C;\alpha_3)\}$, alors pour tout réel non nul k, $G=bar\{(A;k\alpha_1),(B;k\alpha_2),(C;k\alpha_3)\}$.

b) Associativité (théorème du barycentre partiel)

Soit $G = bar\{(A;a),(B;b),(C;c)\}$ tel que : $a+b+c \neq 0$.
Si $I = bar\{(A;a),(B;b)\}\ tel\ que\!: a+b \neq 0$, alors $G = bar\{(I;a+b),(C;c)\}$
I est donc le barycentre partiel des points pondérés : $(A;a),(B;b),(C;c)$
NB : Le barycentre de points pondérés affecté de coefficients égaux non nuls, est appelé : Isobarycentre de ces points pondérés. $G = isobar\{(A;a),(B;b),(C;c)\}$ *si, et seulement si* $a = b = c \neq 0$.

5- Utilisation du barycentre : Problèmes d'alignement et de concours

- ✓ Pour démontrer que trois points sont alignés, on peut démontrer que l'un est barycentre des deux autres ;
- ✓ Pour démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point G, on peut démontrer que G est à la fois barycentre des points A et B et des points C et D.

6- Utilisation du barycentre : Lignes de niveau

a) Ensembles de points M tels que : $\boldsymbol{\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k; k \in \mathbb{R}}$; $\boldsymbol{\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \alpha + \beta \neq 0}$

Soit G barycentre des points pondérés $(A;\alpha),(B;\beta)$ tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2$$
$$= (\alpha + \beta)MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}\right) + \alpha GA^2 + \beta GB^2$$

Alors : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha+\beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha + \beta}$

En posant $\frac{k - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha + \beta} = \lambda$, on a $MG^2 = \lambda$

Conclusion :

- Si $\lambda > 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle de centre G et de rayon de longueur :$\sqrt{\lambda}$: $(\mathcal{L}_k) = C\left(G;\sqrt{\lambda}\right)$;
- Si $\lambda = 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle point, de centre G ou le singleton G ;
- Si $\lambda < 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est l'ensemble vide : $(\mathcal{L}_k) = \emptyset$

NB On pourra déterminer aussi les ensembles de points de la forme : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$; $k \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \alpha + \beta \neq 0$-

b) Ensembles de points M (ou lieu géométrique) tels que : $\boldsymbol{\frac{MA}{MB} = k}$; $k \in \mathbb{R}$

- Si $k < 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est l'ensemble vide : $(\mathcal{L}_k) = \emptyset$;
- Si $k = 0$, alors $MA = 0 \Leftrightarrow M = A$. Donc $(\mathcal{L}_k)$ est le singleton A : $(\mathcal{L}_k) = \{A\}$
- Si $k = 1$, alors $MA = MB \Leftrightarrow M \in méd[AB]$. Donc $(\mathcal{L}_k)$ est la médiatrice de$[AB]$.
- Si $k > 0$,alors $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA = kMB \Leftrightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - k^2\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) = 0$$

Soient $G_1 = bary\{(A;1),(B;k)\}$ et $G_2 = bary\{(A;1),(B;-k)\}$, on a

$$\left(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1A}+k\overrightarrow{MG_1}+k\overrightarrow{G_1B}\right).\left(\overrightarrow{MG_2}+\overrightarrow{G_2A}-k\overrightarrow{MG_2}-k\overrightarrow{G_2B}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$(1+k)(1-k)\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2}=0$$

Conclusion : Donc $(\mathcal{L}_k)$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.