TITRE DE LA LEÇON : CALCULS ALGEBRIQUES
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Algèbre
Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

I- Calculs sur les polynômes

1- Définition :

Une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée fonction polynôme ou polynôme, s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que, pour tout réel x : P$(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les coefficient de P. Le plus grand entier naturel n tel que : $a_n \neq 0$ (a_n: coefficient dominant), est le degré de P. On écrit $d^\circ P = n$ ou d$egP = n$

NB : d$eg(P)^\alpha = \alpha \times degP$, d$eg\lambda P = degP; \lambda \in \mathbb{R}$

2- Propriétés

Soient f$(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et g$(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ deux Polynômes

- f et g sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux : f$(x) = $ g$(x) \Leftrightarrow n = m$ et $a_n = b_m, \ldots,$ $a_1 = b_1,\ a_0 = b_0$
- Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls : f$(x) = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$
- Le produit de deux polynômes f et g, est un polynôme $f.g$. Si f et g sont non nuls, alors :

$$\deg(fg) = degf + degg$$

- La somme de deux polynômes f et g, est un polynôme. Si la somme n'est pas le polynôme nul, alors son degré est inférieur ou égal au plus grand des deux degrés n et m:

  1er cas : Si $n \neq m$, alors $\deg(f+g) = \begin{cases} m \ si \ m > n \\ n \ si \ n > m \end{cases}$

  2ème cas : Si $n = m$ et $a_n + b_m = 0$, alors $\deg(f+g) < n$

  3ème cas : Si $n = m$ et $a_n + b_m \neq 0$, alors $\deg(f+g) = n$

3- Racines et factorisation des polynômes

Définition1 : On appelle racine ou zéro d'un polynôme $P(x)$, tout réel α tel que : $P(\alpha) = 0$.

Pour déterminer les racines de P, on résout l'équation $P(x) = 0$.

Théorème D'Alembert Tout polynôme de degré n, admet au plus n racines. (racines $\leq n$)

Définition2 : Un polynôme f est factorisable (ou divisible) par un polynôme g si, et seulement si, il existe un polynôme q tel que, pour tout réel x, $f(x) = g(x) \times q(x)$.

q est le quotient f par g tel que : $\deg f = degg + degq$

Théorème : Le réel α est une racine du polynôme f si, et seulement si, f(x) est factorisable (ou divisible) par $x - \alpha$ .C'est-à-dire, α est racine de f ($f(\alpha) = 0$) si, et seulement si, il existe un polynôme q tel que, pour tout réel x, $f(x) = (x - \alpha) \times q(x)$; $\deg f = 1 + degq \Leftrightarrow \deg q = degf - 1$.

NB : Pour déterminer le quotient q, on peut utiliser les méthodes suivantes : Horner, division euclidienne, coefficients indéterminés (identification des coefficients), utilisation des identités remarquables (triangle de Pascal, binôme de Newton)
Si les p réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont les racines distinctes deux à deux d'un polynôme non nul f, alors il existe un polynôme g tel que, pour tout réel x : $f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_p) \times g(x)$ tel que :

$$\deg g = degf - p$$

Identités remarquables :

- ✓ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- ✓ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- ✓ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- ✓ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- ✓ $a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2)$

D'une manière générale :
$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p}.b^p$ ou $(a - b)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p a^{n-p}.b^p$: Formule du binôme de Newton.
Les coefficients C_n^p sont déterminés en utilisant le triangle de Pascal.
$a^n - b^n = (a - b) \sum_{p=1}^{n} a^{n-p} b^{p-1}$;$a^n + b^n = (a + b) \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} a^{n-p} b^{p-1}$

II- Fractions rationnelles

1- Définition : Soient f et g deux fonctions polynômes.

La fonction quotient h, telle que : $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est appelée fonction rationnelle.
Le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ est appelé : fraction rationnelle. La fonction h est définie lorsque $g(x) \neq 0$
En effectuant la division euclidienne de f(x) par g(x), on peut écrire $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ sous la forme :

$$h(x) = ax + b + \frac{c}{g(x)}$$

2- Polynômes réciproques de degré n

Un polynôme P, est un polynôme réciproque de degré n, lorsque pour tout réel non nul x, on a

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} P(x)$$