TITRE DE LA LEÇON : EQUATIONS ET INEQUATIONS DE DEGRE SUPERIEUR A DEUX

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

I- Equations et inéquations de degré 3

Soit P un polynôme du troisième degré de la forme : $\mathrm{P}(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$; $a_3 \neq 0$

- Pour résoudre l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$, on trouve d'abord une racine α du polynôme P, puis on factorise $\mathrm{P}(x)$ par $x - \alpha$: $\mathrm{P}(x) = (x - \alpha).Q(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$. Le quotient :
  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ est déterminer à l'aide des méthodes suivantes : Schéma de Horner, division euclidienne, coefficients indéterminés (méthode d'identification des coefficients), utilisation des identité remarquables.
- Pour résoudre les inéquations $\mathrm{P}(x) \leq 0$, $\mathrm{P}(x) < 0$, $\mathrm{P}(x) \geq 0$ ou $\mathrm{P}(x) > 0$, on factorise d'abord le polynôme $P(x)$, puis on étudie son signe.

II- Equations et inéquations de degré 4

1- Equations et inéquations bicarrées

- Pour résoudre une équation bicarrée (équation de la forme : $ax^4 + bx^2 + c = 0; a \neq 0$), on procède par un changement d'inconnue ou de variable, en posant : $x^2 = t;\ t \geq 0$. L'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se ramène alors à l'équation : $at^2 + bt + c = 0$.
- Pour résoudre les inéquations bicarrées, on factorise d'abord le polynôme $ax^4 + bx^2 + c$, en posant : $x^2 = t;\ t \geq 0$, puis on étudie le signe de $ax^4 + bx^2 + c$.

2- Equations et inéquations de degré 4 de la forme :

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0;\quad a \neq 0$$

La résolution des équations et inéquations de degré 4 (ou de degré supérieur à 4), de la forme :
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0;\quad a \neq 0$ se fait de la même manière que les équations et inéquations de degré 3, en utilisant les mêmes méthodes.

3- Equations et inéquations de degré 4 de la forme :

$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0;\quad a \neq 0$ où $P(x)$ est le polynôme symétrique.
Le polynôme $P(x)$ n'admet pas zéro (0) pour racine, car $a \neq 0$. Donc 0, n'est pas solution de l'équation $P(x) = 0$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a : $x^2\left(ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0, car\ x\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 0 \ \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$ (1)

Or $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ (2)

(2) dans (1), on obtient : $a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c-2a$. On pose $x+\frac{1}{x}=t$ (3), puis on résout l'équation : $a\,t^2+bt+c-2a=0$. Enfin, on résout l'équation (3).

Exercice 1

1- Soit le polynôme : $P(x)=2x^3-5x^2-x+6$
   a) Déterminer les réels : a,b,c tels que : $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$.
   b) Résoudre, alors dans IR, l'équation $P(x)=0$. (2pts)
   c) En déduire l'ensemble des solutions dans IR de l'inéquation $P(x)\geq 0$.

Exercice 2

Soit l'équation (E) : $x^4+10x^3+26x^2+10x+1=0$

1- a) Montrer que 0 n' est pas solution de cette équation.
   b) En déduire que (E) a les mêmes solutions que l'équation :
   (E') : $x^2+10x+26+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0$.
2- On pose : $t=x+\frac{1}{x}$.
   a) Montrer que : $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$.
   b) Montrer que, si x est solution de (E'), alors t est solution de (E'') : $t^2+10t+24=0$.
3- Résoudre (E''), en déduire les solutions dans R de l'équation (E).

Exercice 3

1- Soit le polynôme P défini par : $P(x)=2x^3+4x^2+x-7$
   a) Déterminer les réels a et b tels que : $P(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$.
   b) Etudier le signe de (x) .
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2-x-6=0$ et $(x^2-x-6)^{1967}<0$
   d) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$, de l'inéquation : $\frac{2x^3+3x^2+2x-1}{x^2-x-6}\geq -1$.

2-Déterminer les réels α et βpour que $-3x^4+\alpha x^3+\beta$ soit divisible par : x^2+2.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $(x^2-7x+6)(-2x^2+5x-3)>0$; 2) $\begin{cases} x^2-3x-10\geq 0 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$;

3) $\frac{x^2+x+1}{x+1}\geq\frac{x^2-5x+1}{x-1}$;4) $\begin{cases} x^2+x-20\leq 0 \\ \frac{x+4}{x-3}-\frac{2x+1}{x+2}>\frac{13}{2} \\ 4(x+1)<3x+2 \end{cases}$