TITRE DE LA LEÇON : APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE : CERCLES
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Géométrie
Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

I- Définition

On appelle cercle (C) de centre I et de rayon de longueur r, l'ensemble des points M du plan tels que : $IM = r$. $M \in C(I,r) \Leftrightarrow IM = r$; I un point du plan ; r : nombre réel positif.

Remarque :

- ✓ L'ensemble des points M du plan tels que : $IM \leq r$ est le disque de centre I et de rayon r. On note : $\mathcal{D}(I,r)$. Donc $M \in \mathcal{D}(I,r) \Leftrightarrow IM \leq r$.
- ✓ Si $IM > r$, alors M est extérieur au disque.

II- Equations cartésiennes de cercles

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1- Equation d'un cercle défini par son centre et son rayon :

Soient I un point du plan, R un nombre réel strictement positif, (C) le cercle de centre I et de rayon de longueur R.

Pour tout point $M(x;y)$ du plan, on a :

$M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IM} = R^2 \Leftrightarrow IM.IM\cos(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM})^2 \Leftrightarrow IM^2 = R^2$.

On obtient l'équation cartésienne du cercle (C), de centre $I(a;b)$ et de rayon de longueur R :

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

2- Equation du cercle défini par un de ses diamètres :

Soient A et B deux points du plan, (C) le cercle de diamètre $[AB]$.

Pour tout point $M(x;y)$ du plan, on a : $M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

3- Familles de cercles

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; a, b , c, R sont les nombres réels tels que : $R^2 = a^2 + b^2 - c$

L'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan, tels que : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est soit :

- L'ensemble vide, si $R^2 < 0$;
- Un singleton ou un cercle point, si $R^2 = 0$;
- Un cercle, si $R^2 > 0$

4- Equation du cercle circonscrit à un triangle :

Soient A ,B, C trois points du plan.

Pour déterminer l'équation du cercle (C), circonscrit au triangle ABC, on résout le système à trois équations à trois inconnues a, b et c: $\begin{cases} {x_A}^2 + {y_A}^2 - 2ax_A - 2bx_A + c = 0 \\ {x_B}^2 + {y_B}^2 - 2ax_B - 2bx_B + c = 0 \\ {x_C}^2 + {y_C}^2 - 2ax_C - 2bx_C + c = 0 \end{cases}$

5- Equation du cercle inscrit dans un triangle

Pour déterminer une équation du cercle inscrit au triangle ABC, on procède comme suit :

- On détermine une équation cartésienne des droites (AB), (AC) et (BC) ;

— on détermine une équation cartésienne des bissectrices intérieures (Δ_1) et (Δ_2) de deux angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ de ce triangle respectivement : Pour tous points M_1 et M_2 du plan, on a :
$\begin{cases} M_1 \in (\Delta_1) \Leftrightarrow \mathrm{d}(M_1,(AB)) = \mathrm{d}(M_1,(AC)) \\ M_2 \in (\Delta_2) \Leftrightarrow \mathrm{d}(M_2,(AB)) = \mathrm{d}(M_2,(BC)) \end{cases}$

— on détermine un point I, intersection des bissectrices intérieures (Δ_1) et (Δ_2).
Ce point est le centre du cercle (C), inscrit dans le triangle ABC.

— on détermine la longueur du rayon de (C) par : $\mathrm{r} = \mathrm{d}(I,(AB)) = \mathrm{d}(I,(AC))$

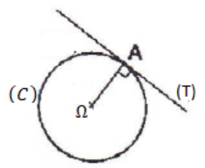
6- Représentations paramétriques d'un cercle

Un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon de longueur R, admet une représentation paramétrique de la forme :$\begin{cases} x = R\cos\theta + a \\ y = R\sin\theta + b \end{cases}$; $\theta \in \mathbb{R}$

7- Equations de la tangente à un cercle

a- Equations de la tangente à un cercle en un point de ce cercle

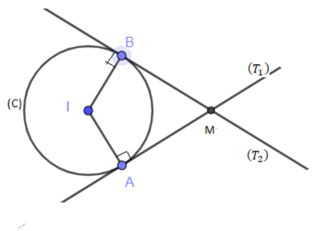
Soient A un point du cercle (C), de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $[\Omega A]$ et (T), la tangente à (C) en A.
Pour tout point $M(x;y)$ du plan, on a : $M \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.
NB : La longueur du rayon de (C) est : $\mathrm{r} = \Omega\mathrm{A} = \mathrm{d}(\Omega,(T))$



b- Equations des tangentes à un cercle passant par un point extérieur à ce cercle.

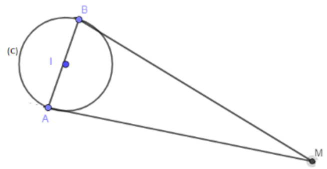
Soit (C) un cercle de centre I. Pour déterminer les équations des tangentes (T_1) et (T_2) au cercle (C), qui passent par un point M, extérieur à (C), on procède comme suit :

— on détermine l'équation du cercle (C') de diamètre $[IM]$;
— on détermine les points A et B, intersection de (C) et (C')
— on détermine les équations des droites : (AM) et (BM)
Donc $(T_1) = (\mathrm{AM})$ et $(T_2) = (\mathrm{BM})$



8- Puissance d'un point par rapport au cercle

a- Définition Soient (C) un cercle de centre Ω et de diamètre $[AB]$; M un point du plan.
On appelle puissance d'un point M par rapport au cercle (C), notée : $\mathcal{P}_{M/(C)}$ ou $\mathcal{P}_{M(C)}$, le réel défini par : $\mathcal{P}_{M/(C)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \Omega\,\mathrm{M}^2 - R^2$; $R = A\Omega = \Omega\mathrm{B}$.



Remarque :

- ✓ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, si (C): $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ et $M(x_0; y_0)$, alors : $\mathcal{P}_{M/(C)} = (x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2 = {x_0}^2+{y_0}^2-2ax_0-2by_0+c$
- ✓ Si $\mathcal{P}_{M/(C)} < 0$, alors M est intérieur au cercle ;
- ✓ Si $\mathcal{P}_{M/(C)} > 0$, alors M est extérieur au cercle ;
- ✓ Si $\mathcal{P}_{M/(C)} = 0$, alors M est sur le cercle.

b- Cocyclicité de quatre points du plan

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que les droites (AB) et (CD) soient sécantes en un point M. Alors : A, B, C et D sont cocycliques si, et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan, tels que :

$x^2+y^2-2x+2y-2m(x-y+1)=0$, où m est un paramètre réel.

Exercice 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points : $A(-1; 6)$, $B(3; 2)$, $C(-2; 1)$, $D(-1; 6)$, $E(3\,;2)$et $F(-2\,;1)$.

Ecrire l'équation du cercle (C), inscrit au triangle ABC et celle du cercle (Γ) circonscrit au triangle DEF.

En déduire les éléments caractéristiques du cercle (Γ).

Exercice 3 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points : $A(0\,;-2)$, $B(4\,;0)$, $K(13\,;-5)$ et les droites, $(D): x+2y=0$ et $(\Delta): 2x-y+3=0$.

1-Former l'équation cartésienne du cercle (C) qui passe par les points A et B qui a son centre sur la droite (D).

2-Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point A.

3-Déterminer l'équation du cercle (C'), de centre I et tangente à la droite (Δ).

Exercice 4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère le cercle (C), de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, puis le cercle (C') d'équation : $x^2+y^2+2x-6y-15=0$.

1-Ecrire l'équation cartésienne de (C).

2-Vérifier que $A(2;-1)$, $M(3;0)$ appartiennent au cercle (C') et que $M(3;0)$ n'appartient pas au cercle (C).

3-Construire les cercle (C') et (C), puis la tangente (T) à (C') au point A et les tangentes (T_1) et (T_2) au cercle (C), passant par M.

4-Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T).

5-Déterminer les équations des tangentes (T_1) et (T_2) au cercle (C), passant par M.

6-Calculer la puissance du point M par rapport au cercle (C).