TITRE DE LA LEÇON : DERIVATION

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Analyse

Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

I- DERIVABILITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1- Nombre dérivé en un point d'abscisse : x_0.

- Une fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l;\ (l \in \mathbb{R})$.

NB : Le réel l est appelé nombre dérivé de f en x_0, noté : $f'(x_0)$ on écrit :

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l.$$

2- Dérivabilité à gauche et à droite de x_0

- f est dérivable à gauche de x_o si et seulement si :
  $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l;\ (l \in \mathbb{R})$.
- f est dérivable à droite de x_o si et seulement si :
  $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l'\ (l' \in \mathbb{R})$.

Remarques :

- Si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_o.
- Si $f'_g(x_0) = l \neq f'_d(x_0) = \ell'; l, l' \in \mathbb{R}$ alors f n'est pas dérivable en x_o.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0.

3- Conséquences graphiques : Interprétation géométrique du nombre dérivé

Si f est dérivable en x_0, le graphique (ou la courbe) de f admet une tangente au point $\mathrm{M}_0(x_0; f(x_0))$, de coefficient directeur $f'(x_0)$:

1^er cas : si $f'(x_0) = 0$, alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses (O x) d'équation $y = f(x_0)$

2^e cas : si $f'(x_0) = l \neq 0$, alors cette tangente a pour équation : $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.

3^e cas : si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, alors la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées (O y) d'équation : $x = x_0$.

4- Nature du point $\mathrm{M}_0(x_0 ; f(x_0))$. On admet que f n'est pas dérivable en x_0.

- Si $\lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ (ou $-\infty$), alors M_0 est un point d'inflexion à (C_f) ;
- Si $\lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ (ou $-\infty\ et\ +\infty$), alors M_0 est un point de rebroussement à (C_f);
- Si $\lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$ et $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ (ou $\pm\infty\ et\ b, ou\ \ a\ et\ b$), alors M_0 est un point anguleux à (C_f).

Remarque :
Un point d'inflexion est un point en lequel la dérivée seconde s'annule en changeant de signe ou la dérivée première s'annule sans changer de signe.

5- Dérivabilité sur un intervalle.

Une fonction f définie sur I=$]a, b[$, f est dérivable sur $]a, b[$,si elle est dérivable en chaque point de cet intervalle.

Conséquence : f est dérivable sur $[a, b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ f \text{ est dérivable à droite de a et à gauche de b} \end{cases}$

NB : Toute fonction dérivable est continue, mais toute fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

II- CALCUL DES DERIVEES

1- Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	$u+v$	uv	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	$\frac{1}{u}$	$\tan U$	$\cot u$
Dérivée f'	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$\frac{u'v-uv'}{V^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$nu'u^{n-1}$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{U'}{\cos^2 U}$	$\frac{-u'}{\text{Sin}^2 u}$

NB : $(ku)' = ku'$; $k \in \mathbb{R}$; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$.

2- Dérivée d'une fonction composée

Soient f et g deux fonctions dérivables telles que : $f \circ g(x) = f[g(x)]$, alors :

$$\big(f \circ g(x)\big)' = (f[g(x)])' = g'(x) \times f'[g(x)].$$

Remarque : Si g est dérivable sur un intervalle I et f dérivable sur g(I), alors $f \circ g$ est dérivable sur I.

3- Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective

Propriété :

Si une fonction numérique f est :

$$\begin{cases} -\text{dérivable(donc continue)sur un intervalle I;} \\ -\text{monotone ou strictement monotone sur I;} \\ -\text{et si de plus}, \forall x \in I,\ f'(x) \neq 0 \end{cases},$$

alors f^{-1} est dérivable sur f(I) et $\forall x \in f(I), (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{f'(y)}$

avec $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$; $x \in f(I)$ et $y \in I$.

Remarque :

- *f^{-1} est dérivable en : $x_0 \in f(I) \Leftrightarrow f'[f^{-1}(x_0)] \neq 0$;*
- *S'il existe $y_0 \in f(I)$ tel que : $f'^{[f^{-1}(y_0)]} = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et la courbe de f^{-1} admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.*

Exercice1 :

Soit $f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin x$.

a- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1; 1[$

b- Prouver, $\forall x \in]-1; 1[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 2 : On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1} ; si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3x-5}{x^2+1} ; \quad si\ x > 0 \end{cases}$;

1- Déterminer l'ensemble de définition E_f de f, puis calculer les limites aux bornes de E_f .
2- Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 0$, puis en déduire une interprétation géométrique.
3- Calculer la dérivée de f sur chacun des intervalles où f est dérivable.
4- Dresser le tableau de variation de f.

Exercice3 :

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1} ; si\ x < 1 \\ f(x) = -x^2 + 4x - 4 ; \quad si\ x > 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$;

1- Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer les limites aux bornes de E_f .
2- Etudier la continuité de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
3- Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 1$, puis en déduire une interprétation géométrique du résultat obtenu.
4- Calculer la dérivée de f sur chacun des intervalles où f est dérivable.
5- Dresser le tableau de variation de f.
6- Tracer la courbe (C) de f.