TITRE DE LA LEÇON : APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE : SPHERES

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Géométrie

Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

I- Définition

On appelle sphère (S) de centre Ω (point de l'espace) et de rayon l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\Omega M = R$. $M \in$ (S) ⇔ $\Omega M = R$; Ω : point de l'espace ; R :nombre réel positif.

Remarque :

L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\Omega M \leq R$, est la boule de centre Ω et de rayon R.

II- Equations cartésiennes d'une sphère

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1- Equation d'une sphère définie par son centre et son rayon :

Une équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω $(a;b;c)$et de rayon de longueur R, est de la forme : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

2- Equation d'une sphère définie par un de ses diamètres :

Soient A et B deux points de l'espace, (S) la sphère de diamètre $[AB]$.

Pour tout point $M(x;y;z)$ de l'espace, on a : $M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow xx'+yy'+zz'=0$.

3- Familles de sphères

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; $a, b, c, , d$, R sont les nombres réels tels que :

$$R^2=a^2+b^2+c^2-d$$

L'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ de l'espace, tels que :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ est soit :

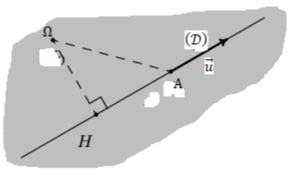
- L'ensemble vide, si $R^2<0$;
- Un singleton , si $R^2=0$;
- Une sphère, si $R^2>0$

4- Sections planes d'une sphère

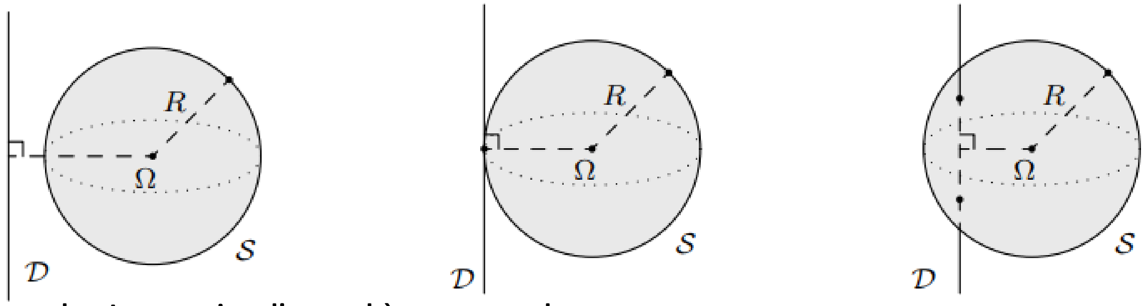
Soit (S) la sphère de centre $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ et de rayon de longueur R

a- Intersection d'une sphère avec une droite

Soit $(\mathcal{D})$ une droite de l'espace passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ un point de l'espace, alors la distance de Ω à $(\mathcal{D})$ est donnée par : $d(\Omega,(\mathcal{D}))=\Omega\mathrm{H}=\frac{\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{A\Omega}\|}{\|\vec{u}\|}$

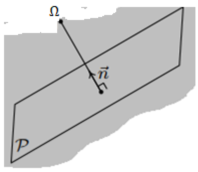


- Si $d(\Omega,(\mathcal{D})) > R$, alors $(\mathcal{D})$ ne coupe pas (S) : $(\mathcal{D}) \cap (S) = \{\ \ \} = \emptyset$;
- Si $d(\Omega,(\mathcal{D})) = R$, alors $(\mathcal{D})$ et (S) sont tangentes en H : $(\mathcal{D}) \cap (S) = \{H\}$;
- Si $d(\Omega,(\mathcal{D})) < R$, alors $(\mathcal{D})$ et (S) se coupent en deux points A et B : $(\mathcal{D}) \cap (S) = \{A, B\}$



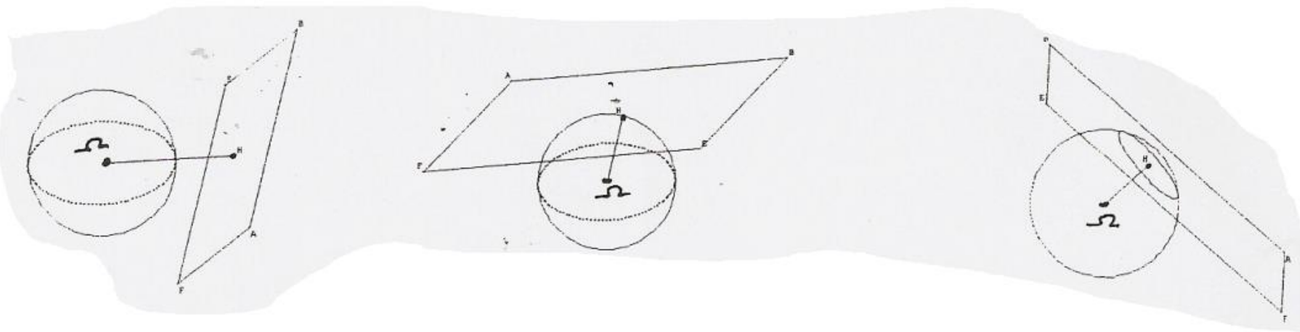
b- Intersection d'une sphère avec un plan

Soit $(\mathcal{P})$ un plan d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$. Soit $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ un point de l'espace, alors la distance de Ω à $(\mathcal{P})$ est donnée par : $d(\Omega, (\mathcal{P})) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$



- Si $d(\Omega,(\mathcal{P})) > R$, alors $(\mathcal{P})$et (S) n'ont aucun point commun : $(\mathcal{P}) \cap (S) = \{\ \ \} = \emptyset$;
- Si $d(\Omega,(\mathcal{P})) = R$, alors $(\mathcal{P})$ et (S) sont tangentes en H : $(\mathcal{P}) \cap (S) = \{H\}$;
- Si $d(\Omega,(\mathcal{P})) < R$, alors l'intersection entre $(\mathcal{P})$ et (S), est le cercle (C) du plan, de centre H et de rayon r tel que : $r^2 + H\Omega^2 = R^2$; H est le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathcal{P})$, $d(\Omega,(\mathcal{P})) = H\Omega$

  NB : Soit $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$. Pour tout point M de $(\mathcal{P})$ $\overrightarrow{\Omega M} = k\vec{n}$



c- Intersection de deux sphères

Soient deux sphères :
$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ et
$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + d' = 0$. Alors :

$(S_1) \cap (S_2)$ donne : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ 2(a' - a)x + 2(b' - b)y + 2(c' - c)z + d' - d = 0 \end{cases}$

Cela correspond à l'intersection d'une sphère et d'un plan, on est donc ramené au problème précédent que l'on traite géométriquement (sauf si les sphères sont concentriques : $a' = a, b' = b, c' = c$)

5- Représentation paramétrique d'une sphère

Désignons par $(x; y; z)$, $\Omega(a; b; c)$, $\mathrm{O}(0; 0; 0)$ dans l'ancien repère$\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et par $M(X; Y; Z)$, $\Omega(0; 0; 0)$ et dans le nouveau repère$\left(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Alors :

$\cos\theta = \frac{X}{\Omega\mathrm{N}} \Leftrightarrow X = \Omega\mathrm{N}\cos\theta$; $\cos\varphi = \frac{\Omega\mathrm{N}}{\Omega\mathrm{M}} \Leftrightarrow \Omega\mathrm{N} = \mathrm{R}\cos\varphi$; $\Omega\mathrm{M} = \mathrm{R}$

On obtient : $X = \mathrm{R}\cos\varphi\cos\theta$.

D'autre part : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{Y}{\Omega\mathrm{N}} = \frac{Y}{\mathrm{R}\cos\varphi}. \Rightarrow: \mathrm{Y} = \mathrm{R}\cos\varphi\sin\theta$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{Z}{\mathrm{R}}. \Leftrightarrow: Z = R\sin\varphi$.

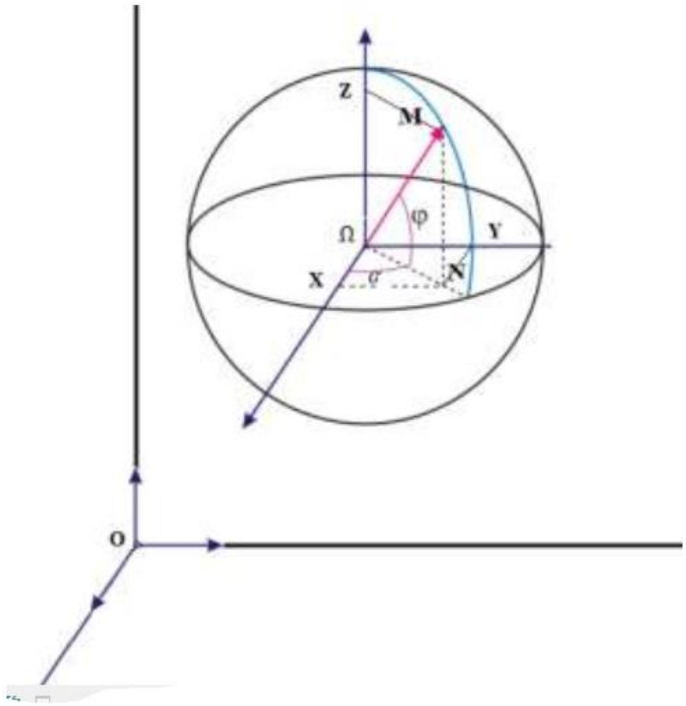
En utilisant la relation de Chasles, on aura :

$\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}} = \overrightarrow{\Omega\mathrm{O}} + \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X-0 \\ Y-0 \\ Z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-a \\ 0-b \\ 0-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix}$.

Donc ,une représentation paramétrique d'une sphère est donnée par :

$\begin{cases} x = \mathrm{R}\cos\varphi\cos\theta + a \\ y = \mathrm{R}\cos\varphi\sin\theta + b. \\ z = R\sin\varphi + c \end{cases}$

NB : x, y et z sont les coordonnées cylindriques du point M



Exercice

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on donne les points : A(1; 2 ; −1), B(−3;−2 ; 3) et C(0 ; −2 ; −3)

1- Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. En déduire que $\vec{n}(2;-1;1)$est un vecteur normal au plan (ABC).

2- Soit (***P***)le plan dont une équation cartésienne est $x + y - z + 2 = 0$.
Montrer que les plans (ABC)et (***P***)sont perpendiculaires.

3-Soit G le barycentre des points pondérés (A,1),(B, −1)et(C, 2).

a. Déterminer les coordonnées du point G et prouver que la droite (CG) est orthogonale au plan (***P)***

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

c. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (***P***)avec la droite (CG).

4-Démontrer que l'ensemble (*S*) des points *M* de l'espace tels que :
$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.

5-Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ), intersection du plan (P) et de la sphère (S).