TITRE DE LA LEÇON : APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE : ENSEMBLES DE POINTS
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Géométrie
Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

I- Définition d'une ligne de niveau

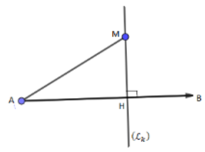
Soit l'application : $f \begin{array}{l} : P \longrightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto f(M) \end{array}$ appelée : Fonction scalaire de Leibniz ; M désigne un point du plan P.
On appelle ligne de niveau k de f, l'ensemble $(\mathcal{L}_k)$des points M du plan tels que : $f(M) = k;\ k \in \mathbb{R}$

II- Détermination des lignes de niveau ou ensembles de points ou lieux géométriques

1- Ensembles de points M tels que : $\vec{U}.\overrightarrow{AM} = k;\ k \in \mathbb{R}$
Soit B un point du plan tel que : $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$, ona $\vec{U}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = k$.
Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB), on a :
Procédé1 : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overline{AB} \times \overline{AH} = k \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$

Procédé2 : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = k$. A, B et H étant alignés, alors $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AB}; \lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = k \Leftrightarrow \lambda AB^2 = k \Leftrightarrow \lambda = \frac{k}{AB^2}. \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{k}{AB^2}\overrightarrow{AB}$

Ainsi, l'ensemble $(\mathcal{L}_k)$des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = k$, est une droite perpendiculaire à la droite (AB), passant par H.



2- Ensembles de points M tels que : $MA^2 + MB^2 = k;\ k \in \mathbb{R}$
Soit I milieu de $[AB]$ tels que : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$
$MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2$
$= 2MI^2 + 2IA^2 = 2MI^2 + 2\left(\frac{AB}{2}\right)^2$.
Alors : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4}$
En posant $\frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4} = \lambda$, on a : $MI^2 = \lambda$
Conclusion :

- Si $\lambda > 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle de centre I et de rayon de longueur :$\sqrt{\lambda}$: $(\mathcal{L}_k) = C(I; \sqrt{\lambda})$;
- Si $\lambda = 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle point, de centre I ou le singleton I ;
- Si $\lambda < 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est l'ensemble vide : $(\mathcal{L}_k) = \emptyset$.
-

3- Ensembles de points M (ou lieu géométrique) tels que : $MA^2 - MB^2 = k;\ k \in \mathbb{R}$
Soit I milieu de $[AB]$ tels que : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$
$MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$
.Alors : $MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = k$.
Soit H, le projeté orthogonal de M sur (AB), alors : $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 2\overline{AB} \times \overline{IH} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}}$

Ainsi, l'ensemble $(\mathcal{L}_k)$des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = k$, est une droite perpendiculaire à la droite (AB), passant par H, avec I milieu de $[AB]$.

4- Ensembles de points M (ou lieu géométrique) tels que : $\overrightarrow{MA}\,.\overrightarrow{MB} = k;\ k \in \mathbb{R}$

Soit I milieu de $[AB]$ tels que : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$

$$\overrightarrow{MA}\,.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}\,.\overrightarrow{IB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Alors : $\overrightarrow{MA}\,.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$

En posant $k + \frac{AB^2}{4} = \lambda$, on a $MI^2 = \lambda$

Conclusion :

- Si $\lambda > 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle de centre I et de rayon de longueur :$\sqrt{\lambda}$: $(\mathcal{L}_k) = C(I; \sqrt{\lambda})$;
- Si $\lambda > 0$ et $k = 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est le cercle de diamètre $[AB]$.
- Si $\lambda = 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle point, de centre I ou le singleton I ;
- Si $\lambda < 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est l'ensemble vide : $(\mathcal{L}_k) = \emptyset$.

5- Ensembles de points M tels que : $\boldsymbol{\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k; k} \in \mathbb{R}\,\boldsymbol{;\, \alpha \neq 1, \beta \neq 1, \alpha + \beta} \neq 0$

Soit G barycentre des points pondérés $(A; \alpha), (B; \beta)$ tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$$
$$= (\alpha + \beta)MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}) + \alpha GA^2 + \beta GB^2$$

Alors : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha + \beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha + \beta}$

En posant $\frac{k - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha + \beta} = \lambda$, on a : $MG^2 = \lambda$

Conclusion :

- Si $\lambda > 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle de centre G et de rayon de longueur :$\sqrt{\lambda}$: $(\mathcal{L}_k) = C(G; \sqrt{\lambda})$;
- Si $\lambda = 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle point, de centre G ou le singleton G ;
- Si $\lambda < 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est l'ensemble vide : $(\mathcal{L}_k) = \emptyset$.

NB : On pourra déterminer aussi de manière analogue, les ensembles de points de la forme :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k; \quad k \in \mathbb{R}\,; \alpha \neq 1, \beta \neq 1, \alpha + \beta \neq 0.$$

6- Ensembles de points M (ou lieu géométrique) tels que : $\boldsymbol{\frac{MA}{MB} = k};\ k \in \mathbb{R}$

- Si $k < 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est l'ensemble vide : $(\mathcal{L}_k) = \emptyset$;
- Si $k = 0$, alors $MA = 0 \Leftrightarrow M = A$. Donc $(\mathcal{L}_k)$ est le singleton A : $(\mathcal{L}_k) = \{A\}$
- Si $k = 1$, alors $MA = MB \Leftrightarrow M \in méd[AB]$. Donc $(\mathcal{L}_k)$ est la médiatrice de$[AB]$.
- Si $k > 0$,alors $\boldsymbol{\frac{MA}{MB} = k} \Leftrightarrow MA = kMB \Leftrightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - k^2\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$$

Soient $G_1 = bary\{(A; 1), (B; k)\}$ et $G_2 = bary\{(A; 1), (B; -k)\}$, on a

$$(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A} + k\overrightarrow{MG_1} + k\overrightarrow{G_1B}).(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A} - k\overrightarrow{MG_2} - k\overrightarrow{G_2B}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(1 + k)(1 - k)\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0$$

Conclusion : Donc $(\mathcal{L}_k)$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

Exercice 1 :

On donne : $\mathrm{AB} = 10\mathrm{cm}$.

Déterminer, puis construire l'ensemble (E) des points M du plan dans chacun des cas suivants :

1- (E) : $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{AB} = -12$
2- (E) : $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{AB} = 36$
3- (E) : $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = 24$;
4- (E) : $2MA^2 - 2MB^2 = 80$;
5- (E) : $2MA^2 + 3MB^2 = 165$;
6- (E) : $MA^2 + MB^2 = 60$;
7- (E) : $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$

Exercice 2 :

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que : $\mathrm{AB} = 3\mathrm{a}$ et $\mathrm{AC} = 2\mathrm{a}$ où $\mathrm{a} > 0$.

1- Construire le point G, barycentre du système de points pondérés : $(A; 1), (B; 2)(C; 3)$.
2- Déterminer, puis construire l'ensemble (Γ) des points M du plan dans chacun des cas suivants :
   a) $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 48a^2$;
   b) $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 30a^2$.