TITRE DE LA LEÇON : CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Analyse

Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

1- Continuité en un point d'abscisse x_0

Une fonction numérique f est continue en x_0 si, et seulement si $f(x_0)$ existe (f est définie en x_0) et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

a- Continuité à gauche et à droite

- f est continue à gauche de x_0 si, et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- f est continue à droite de x_0 si, et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Conséquence : f est continue en x_0 si, et seulement si : $\begin{cases} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

b- Opérations sur les fonctions continues en un point

Soient f et g deux fonctions continues en x_0 et $k \in \mathbb{R}$.

Alors les fonctions kf, f + g, fg et $\frac{f}{g}$ (avec g$\neq 0$) sont continues en x_0.

2- Prolongement par continuité :

Soient f une fonction non définie en x_0 et l un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, alors on peut prolonger f par continuité telle que : $\begin{cases} g(x) = f(x)\,;\, x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$

La fonction g ainsi obtenue, est appelée : Prolongement par continuité de f en x_0 .

Remarque : $E_g = E_f \cup \{x_0\}$

3- Continuité sur un intervalle

a- Propriétés :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ($I = [a, b]$ ou $I =]a, b[$) ; avec $a < b$

- On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ si, elle est continue en tout point de cet intervalle ;
- On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle fermé$[a, b]$, si elle est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b ;
- Si la fonction g ne s'annule pas sur I ($\forall x \in I, g(x) \neq 0$), alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I ;
- Si une fonction f est positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I ;
- Si f est continue sur un intervalle I, g continue sur un intervalle J et si de plus $f(I) \subset J$, alors gof est continue sur I.

b- Image d'un intervalle par une fonction continue

- Si une fonction f est continue et strictement croissante sur un intervalle $[a, b]$ ou$]a, b[$, alors : $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ ou $f(]a, b[) = \left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x); \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$.
- Si une fonction f est continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a, b]$ ou$]a, b[$, alors : $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$ ou $f(]a, b[) = \left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x); \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$.

- Si une fonction f est bornée sur un intervalle I et atteint ses bornes et si de plus f est à la fois croissante et décroissante sur I, alors $f(I) = [m; M]$ où m est le minimum de f sur I et M est le maximum de f sur I.

4- Théorème des valeurs intermédiaires.

Si une fonction numérique f est continue (surjective) et strictement monotone (injective) sur un intervalle $]a, b[$ et si de plus $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe un réel unique $\alpha \in]a, b[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.
NB : Ce théorème signifie que la courbe (C) de f, coupe l'axe des abscisses entre a et b au point d'abscisse α. On dit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]a, b[$.

5- Théorème de la réciproque continue d'une fonction bijective

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors elle réalise une bijection de I sur f(I).
Par conséquent, f admet une bijection réciproque f^{-1} définie de f(I) vers I et variant dans le même sens que f.
NB : La courbe de f et celle de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.
Propriété : Toute fonction continue et monotone, est bijective.

6- Calcul approché des zéros d'une fonction continue par la méthode par dichotomie

Exemple : On donne $f(x) = 2 + x^3$. On admet que l'équation $f(x)$ admet une solution unique $\alpha \in]-2; 0[$. Calculons une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès, en utilisant la méthode par dichotomie

- Centre de$]-2; 0[$: $c_0 = \frac{-2+0}{2} = -1$.

$f(-2) = -6, f(-1) = 1, f(0) = 2. Comme\ f(-2) \times f(-1) < 0, alors : -2 < \alpha < -1$

- Centre de$]-2; -1[$: $c_1 = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2}$

$f(-2) = -6, f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}, f(-1) = 1$. Comme $f(-\frac{3}{2}) \times f(-1) < 0$,alors :$-\frac{3}{2} < \alpha < -1$

- Centre de$\left]-\frac{3}{2}; -1\right[$: $c_2 = \frac{-\frac{3}{2}-1}{2} = -\frac{5}{4}$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}, f\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{64}, f(-1) = 1$. Comme $f(-\frac{3}{2}) \times f(-\frac{5}{4}) < 0$,alors :$-\frac{3}{2} < \alpha < -\frac{5}{4}$
Soit $-1{,}50 < \alpha < -1{,}25$. Donc $\alpha \approx -1{,}25$.

Exercice 1 :

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$. Etudier la continuité de g en $x_0 = 1$.
Solution :

- g est définie$\Leftrightarrow |1 - x^2| \geq 0$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}, |1 - x^2| \geq 0$. Donc $E_g =]-\infty; +\infty[$;
- $g(1) = \sqrt{|1 - 1^2|} = 0$
- $\begin{cases} g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,; si\ x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ g(x) = \sqrt{1 - x^2}; \quad si\ x \in [-1; 1] \end{cases}$
- $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0$; $\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0$;
- $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$, alors g est continue en $x_0 = 1$.

Exercice 2 : On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1}; si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3x-5}{x^2+1}; \quad si\ x > 0 \end{cases}$;

1- Déterminer l'ensemble de définition E_f de f, puis calculer les limites aux bornes de E_f .
2- Etudier la continuité de f au point d'abscisse $x_0 = 0$, puis en déduire l'ensemble de continuité de f.