



## TITRE DE LA LEÇON : FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

**Discipline : Mathématiques**

**Sous-discipline : Analyse**

**Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D**

**1- Rappel : Parité, Périodicité.** Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Une fonction numérique  $f$  définie sur  $E_f$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Paire si } \forall x \in E_f, -x \in E_f \text{ et } f(-x) = f(x) \\ \text{Impaire si } \forall x \in E_f, -x \in E_f \text{ et } f(-x) = -f(x) \\ \text{Périodique, de période } T \text{ si } \forall x \in E_f, x + T \in E_f \text{ et } f(x + T) = f(x) \end{array} \right. ;$$

**Conséquences :**

- Si  $f$  est paire, alors l'axe des ordonnées, est un axe de symétrie de la courbe (C) de  $f$ .
- Si  $f$  est impaire, alors l'origine du repère est un centre de la courbe (C) de  $f$ .

**Remarque**

- Un point  $I(a; b)$  est un centre de symétrie de la courbe d'une fonction numérique  $f$  si et seulement si :

$$\forall x \in E_f, \quad 2a - x \in E_f \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b$$

- Une droite (D) d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie de la courbe d'une fonction numérique  $f$  si et seulement si :  $\forall x \in E_f, 2a - x \in E_f \text{ et } f(2a - x) = f(x)$

### 2-Etude des fonctions trigonométriques

-Les fonction trigonométriques :  $x \mapsto \cos(ax + b)$  et  $x \mapsto \sin(ax + b)$  ;  $a \in \mathbb{R}^*$ , sont définies sur  $\mathbb{R}$  et périodiques de période :  $T = \frac{2\pi}{|a|}$ .

On peut les étudier sur un intervalle  $I$  de longueur  $T$  de la forme :  $I = [0; T]$  ou  $I = \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$  ou

$$I = [\alpha; \alpha + T] \text{ ou } I = \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right] \text{ ou } I = \left[-\frac{b}{a}; -\frac{b}{a} + T\right] \text{ ou } I = \left[-\frac{b}{a} - \frac{T}{2}; -\frac{b}{a} + \frac{T}{2}\right].$$

-Les fonction trigonométriques  $f : x \mapsto \tan(ax + b)$  et  $x \mapsto \cot(ax + b)$  ;  $a \in \mathbb{R}^*$ , sont périodiques de période :  $T = \frac{\pi}{|a|}$ . On peut les étudier sur un intervalle  $I$  de la forme :  $I =$

$$E_f \cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$$

$$\text{ou } I = E_f \cap \left[-\frac{b}{a} - \frac{T}{2}; -\frac{b}{a} + \frac{T}{2}\right].$$



### Remarques

- Les fonctions  $x \mapsto \cos x$  et  $x \mapsto \sin x$  sont appelées : fonctions circulaires. Elles sont périodiques, de période :  $T = 2\pi$ .
- Si  $b \neq \pi k$  ou  $b \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ;  $k \in \mathbb{Z}^*$ . alors toutes les fonctions trigonométriques :  $x \mapsto \cos(ax + b)$  et  $x \mapsto \sin(ax + b)$  ne sont, ni paires, ni impaires.
- La courbe représentative d'une fonction trigonométrique  $f$  de période  $T$ , sera complétée dans tout le plan (sur  $E_f$ ) par des translations successives de vecteurs :  $\vec{u} = kT \vec{i}$ ;  $k \in \mathbb{Z}^*$ .
- Les fonctions trigonométriques :  $x \mapsto \cos ax$  sont paires et  $x \mapsto \sin ax$  sont impaires.

### Exercice :

On considère la fonction numérique  $f$  à variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x}{1+x^2} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sin(\pi x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1-Montrer que  $f$  peut être étudiée sur  $E = ]-\infty ; 2]$ .

2-Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$ . Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

a) Calculer la dérivé de  $f$  dans chacun des intervalles où  $f$  est dérivable.

b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

3- Construire la courbe  $(C)$  de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

4- Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[-1; 0[$ .

a) Montrer que  $h$  admet une bijection réciproque  $h^{-1}$  dont on dressera le tableau de variations.

b) Sans expliciter  $h^{-1}(x)$ , calculer  $(h^{-1})'(\frac{2}{5})$ .

c) Construire la courbe  $(C')$  de  $h^{-1}$  dans le même repère que  $(C)$  de  $f$ .

5- Soit  $g$  la fonction définie sur  $E = ]-\infty ; 2]$  par :  $g(x) = -f(x)$ . Sans étudier  $g$ , construire la courbe  $(C'')$  de  $g$  dans le même repère que  $(C)$  de  $f$ .