TITRE DE LA LEÇON : GENERALITES SUR LES SUITES NUMERIQUES

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Analyse

Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

1- Définition :

On appelle suite numérique, toute fonction U de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

La suite U est souvent notée (U_n) et son terme général noté : U_n ; $n \in \mathbb{N}$.

2- Mode de détermination d'une suite

D'une manière générale, une suite numérique est déterminée soit par une formule explicite (le terme général est donné en fonction de n), soit par une formule de récurrence (le terme général est lié à un terme consécutif).

Exemple :

La suite (U_n) définie par : $U_n = 2n + 3$ est déterminée par une formule explicite, par contre, la suite (V_n) définie par : $\begin{cases} V_0 = 5 \\ V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$ est déterminée par une formule de récurrence.

3- Passage d'un mode de détermination à l'autre

Exemple 1 :

La suite (U_n) définie par : $U_n = 2n + 3$. Définissons cette suite par une formule de récurrence

Pour $n = 0$, on a $U_0 = 2(0) + 3 = 3$.

Pour $n = n + 1$, on a $U_{n+1} = 2(n + 1) + 3 = 2n + 3 + 2 \Leftrightarrow U_{n+1} = U_n + 2$

Donc la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.

Exemple 2 :

La suite (U_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 5u_n \end{cases}$.Définissons cette suite par une formule explicite.

Pour $n = 0$, on a $U_1 = 5u_0$;

Pour $n = 1$, on a $U_2 = 5u_1 = 5^2u_0$;

Pour $n = 2$, on a $U_3 = 5u_2 = 5^3u_0$

Pour tout entier naturel n, on peut conjecturer que, $U_n = 5^nu_0 = 5^n \times 5 = 5^{n+1}$.

4- Représentation graphique des termes d'une suite

Considérons une suite définie par son premier terme u_0 et par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue.

Pour représenter graphiquement une telle suite, on procède de la manière suivante :

- On trace la courbe (C) de la fonction f : $x \longmapsto f(x)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$;
- Le premier terme u_0 étant donné, on obtient $u_1 = f(u_0)$ comme ordonné du point $(u_0 \,; u_1)$ de (C) ;
- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation : $y = x$.

5- Etude d'une suite numérique :

a- Sens de variation d'une suite : Une suite (U_n) est dite :

- Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n \geq 0$; alors la suite (U_n) est croissante.
- Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n \leq 0$; alors la suite (U_n) est décroissante.
- Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = U_n = U_0$; alors la suite (U_n) est constante.

b- Minoration ; majoration

- (U_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $U_n \geq m$
- (U_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $U_n \leq M$
- (U_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée : $m \leq U_n \leq M$.

Remarque :

- La borne supérieure ou supremum (sup), est le plus petit des majorants.
- La borne inférieure ou infimum (inf), est le plus grand des minorants.

c- Convergence d'une suite.

Une suite (U_n) est convergente, si elle admet une limite finie : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l; l \in \mathbb{R}$.
Une suite (U_n) est divergente, si elle admet une limite infinie: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$ ou elle n'a pas de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l; l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l'; l' \in \mathbb{R}$, mais $l \neq l'$.

Théorèmes :

- Toute suite convergente admet une limite unique ;
- Toute suite convergente, est bornée ;
- Toute suite croissante et majorée, est convergente ;
- Toute suite décroissante et minorée, est convergente ;
- Toute suite croissante et non majorée, est divergente et sa limite est $+\infty$;
- Toute suite décroissante et non minorée, est divergente et sa limite est $-\infty$.

d- Suites adjacentes :

Deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si, et seulement si, l'une est croissante et l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$.

e- Suites périodiques:

Une suite (U_n) est périodique, s'il existe un entier naturel non nul p tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+p} = U_n$.
p est la période de (U_n).

Exercice 1 :

1) Etudier le sens de variation de la suite (U_n) définie par : $U_n = n^2 + 2n - 2$.
2) Démontre que la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{-3n+1}{n+2}$ est minorée par -3 et majorée par 2.

Solution :

1) Sens de variation de la suite (U_n) définie par : $U_n = n^2 + 2n - 2$

$$U_{n+1} - U_n = \left((n+1)^2 + 2(n+1) - 2\right) - (n^2 + 2n - 2) = 2n + 3$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n > 0$, alors la suite (U_n) est croissante.

3) Démontre que (V_n) est minorée par -3 et minorée par 2 :

- $V_n - (-3) = \frac{-3n+1}{n+2} + 3 = \frac{7}{n+2} > 0 \Rightarrow V_n > -3$. D'où (V_n) est minorée par -3.

- $V_n - 2 = \frac{-3n+1}{n+2} - 2 = \frac{-5n-3}{n+2} < 0 \Rightarrow V_n < 2$. D'où (V_n) est majorée par 2.

Exercice 2 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{2n+5}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (U_n).
2. Etudier le sens de variation de la suite (U_n)
3. Démontrer que la suite (U_n) est majorée par 5.
4. Démontrer que la suite (U_n) est minorée par 2.
5. En déduire que la suite(U_n) est bornée.
6. Etudier la convergence de la suite (U_n).

Exercice 3 :

On donne la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \end{cases}$.

Représenter sur un axe les premiers termes de cette suite.

Exercice 4 :

Soient (X_n) et (Y_n) deux suites telles que : n$\in \mathbb{N}^\star$, X_n= 1+ $\frac{1}{1^2\times2^2}$ +$\frac{1}{2^2\times3^2}$ + … + $\frac{1}{(n-1)^2\times n^2}$ et

Y_n= $X_n + \frac{1}{3n^3}$. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.