TITRE DE LA LEÇON : GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Géométrie

Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

1- Droites de l'espace

Soit **A** un point de l'espace et soit $\vec{\boldsymbol{u}}$ un vecteur non nul.

L'ensemble (D) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$ et $\vec{\boldsymbol{u}}$ soient colinéaires, est une droite de l'espace.

On note : $d(A,\vec{\boldsymbol{u}})$, la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}$ ou droite de repère $(A,\vec{\boldsymbol{u}})$

$M \in (D) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R};\ \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} = k\vec{\boldsymbol{u}}$

Une droite (D), passant par $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb\,; k \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + kc \end{cases}$ et pour équation cartésienne :

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

2- Plan de l'espace

a- Représentation paramétrique d'un plan

Soit **A** un point de l'espace et soit$(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})$ un couple de vecteurs non colinéaires.

L'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$, $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$ soient coplanaires, est un plan de l'espace. $M \in (P) \Leftrightarrow \exists k,k' \in \mathbb{R};\ \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} = k\vec{\boldsymbol{u}} + k'\vec{\boldsymbol{v}}$

Un plan (P), passant par $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\end{pmatrix}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a'}\\ \boldsymbol{b'}\\ \boldsymbol{c'}\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_0 + ka + k'a' \\ y = y_0 + kb + k'b'\,; (k,k') \in \mathbb{R}^2 \\ z = z_0 + kc + k'c' \end{cases}$

NB : Si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$, alors M appartient au plan (ABC)

b- Equation cartésienne d'un plan

Tout plan affine (P) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne de la forme :

$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0.}$

NB : $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}.\vec{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0}$ où A est un pont du plan (P)

Un plan possède une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires.

c- Distance d'un point à un plan

Soient (P) : $ax + by + cz + d = 0$ un plan de repère $(A;\vec{u},\vec{v})$, M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur (P). Alors :

$d(M,(P)) = MH = \frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}.(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} = \frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$; $A(x_0;y_0;z_0)$.

NB : L'aire d'un triangle ABC est donnée par : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

d- Position relative d'une droite et d'un plan et celle de deux plans

Soient (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, (P) un plan de repère $(A; \vec{v}, \vec{w})$ et de vecteur normal $\vec{n}$; (P') un plan de vecteur normal $\vec{n}'$.

- (D)//(P) $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \perp \vec{n}$ $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n} = 0$. (ou bien, on montre que : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires)
- (D) $\perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires : $\vec{u} = k\vec{n}$ (ou on montre que : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} = 0$)
- **(**D) et (P) sont sécants $\Leftrightarrow$ $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$ (ou on montre que : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires)
- (P)//(P') $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires : $\vec{n} = k\vec{n}'$
- (P) $\perp (P') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$ $\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}' = 0$.
- **(**P) et (P') sont sécants $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires

e- Intersection de deux plans

Soient $(P): ax + by + cz + d = 0$ et $(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.
Si (P) et (P') sont sécants, alors l'intersection des plans (P) et (P') est une droite (D) de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{n} \Lambda \vec{n}'$ et de système d'équations : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$.