TITRE DE LA LEÇON : LIMITES D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Trigonométrie

Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se lit : limite de f(x) quand x tend vers x_0.

1- Limites usuelles (limites classiques):

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel a, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty\ ;\ \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty\ ;\ \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty;\ \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0\ ;$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty, \text{si } n \text{ est impair} \end{cases};\ \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty, \text{si } n \text{ est impair} \end{cases};$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0;\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1;\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$$

2- Opérations sur les limites.

Soient l et l' deux réels non nuls, limites respectives de deux fonctions f et g. On a le tableau suivant.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0	0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x)$	$l \times l'$	∞		$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	F.I	0
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	∞		F.I			∞	0	F.I

Remarques :

- $+\infty \times l = \begin{cases} +\infty, \text{si } l > 0 \\ -\infty, \text{si } l < 0 \end{cases}$.
- Les résultats de la forme " $\infty - \infty$", "$\infty \times 0$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et " $\frac{0}{0}$ " ne sont pas connus à priori ; ce sont des formes indéterminées (F.I). Pour lever l'indétermination, on peut envisager la *factorisation* puis *simplification*, la *conjugaison (expression conjuguée)* ou le *changement de variable.*

3- Limites et inégalités

Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions telles que, $\forall x \in I \subset \mathbb{R},\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Théorèmes de comparaison

Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un même intervalle $I =]a; +\infty[$ ou $(I =]-\infty; a[)$

— Si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $\begin{cases} \text{si} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, alors \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \\ \text{si} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty, alors \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

— Si $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$ et $\begin{cases} \text{si} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty, alors \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \text{si} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, alors \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$

— Si $\forall x \in I, |f(x) - l| \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0, alors \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l\ ; l \in \mathbb{R}$

Exercice1 :

Calcule les limites suivantes : $a)\ \lim_{x\to-\infty}(-5x^3+7x+4)$; b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+2x}{x-1}\right)$; c) $\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$; d) $\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{4x}-2}$;

Solution : $a)\ \lim_{x\to-\infty}(-5x^3+7x+4)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(-5+\frac{7}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+2x}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=+\infty$

c) $\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}.$

Exercice2 :

Calculer la limite de la fonction f au point indiqué, dans chacun des cas suivants :

$f(x)=\frac{x^3-7x+6}{2x^2+3x-10};\ x_o=2$; $f(x)=\frac{x^2-x+1}{2x^3+x+2}, x_o=-\infty$; $f(x)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right), x_o=+\infty$

$f(x)=\left(\sqrt{x^2+3x-2}+x\right), x_o=-\infty$; $f(x)=\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{2-x}\right), x_o=-\infty$

$f(x)=\frac{x^2-x-1}{x-2}, x_o=2^-$; $f(x)=\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}, x_o=2$; $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}, x_o=-\infty$;

$f(x)=\frac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}}, x_o=3$; $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}, x_o=0$; $f(x)=\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}, x_o=\frac{\pi}{4}$;

$f(x)=\frac{3x^3+3x^2-15x+9}{2x^3-5x^2+4x-1}, x_o=1$; $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3\right), x_o=0$; $f(x)=\frac{1+\cos x}{(x-\pi)\sin x}, x_o=\pi$;

$f(x)=\frac{1-2\mathrm{Sin}^2x}{1+\cos 4x}, x_o=\frac{\pi}{4}$; $f(x)=\frac{x+\sin x}{3-\sin x}, x_o=+\infty.$

4- Branches infinies :

Soit f une fonction définie sur : $E_f=]-\infty;x_0[\cup]x_0;+\infty[$

<table>
<tr><td>si $\lim_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$,</td><td colspan="2">Alors la droite d'équation : $x=x_0$ est une asymptote « verticale » à la courbe (C) de f</td></tr>
<tr><td>si $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=y_0$</td><td colspan="2">Alors la droite d'équation : $y=y_0$ est une asymptote « horizontale » à la courbe (C) de f au voisinage de $\pm\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">si $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ et</td><td>$\begin{cases}\text{si } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a; a\in\mathbb{R}^*\\ \text{et } \lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b; b\in\mathbb{R}\end{cases}$</td><td>Alors la droite d'équation : $y=ax+b$ est une asymptote « oblique» à la courbe (C) de f au voisinage de ∞</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases}\text{si } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a; a\in\mathbb{R}^*\\ \text{et } \lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\infty\end{cases}$</td><td>Alors la droite d'équation : $y=ax$ est une direction asymptotique à la courbe (C) de f au voisinage de ∞ ou (C) admet une branche parabolique de direction : $y=ax$</td></tr>
</table>

	si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$	Alors la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de ∞
	si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \infty$	Alors la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de ∞

Remarque

-Pour montrer que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de ∞, on montre que : $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$.

-Pour étudier la position de (C) par rapport à (D), on étudie le signe de :

$f(x) - y = f(x) - (ax + b)$

- ✓ Si $(x) - y < 0$, alors (C) est en dessous de (D) ;
- ✓ Si $(x) - y > 0$, alors (C) est au-dessous de (D) ;
- ✓ Si $(x) - y = 0$, alors (C) et (D) se coupent en un point.