TITRE DE LA LEÇON : RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Analyse

Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

1- Principe du raisonnement

Soit $P(n)$ une propriété ou une relation à démontrer.

Pour démontrer par récurrence que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n :

- on vérifie que $P(n)$ est vraie au rang initial (initialisation) ;
- on suppose que $P(n)$ est vraie au rang k ; $k \leq n$ (hypothèse de récurrence) ;
- on démontre que $P(n)$ est vraie au rang $k+1$ (hérédité) ;
- on conclut que comme $P(n)$ est vraie au rang $k+1$, alors elle est vraie au rang n.2-

2- Applications

Exercice 1 : Démontrer par récurrence que :

a) $\forall\, n\epsilon N^*,\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $\forall\, n\epsilon N^*, n^5-n$ est divisible par 5.

Solution

Démontrons par récurrence :

a) $\forall\, n\epsilon N^*,\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Pour $n=1$, $1^2=1$; $\frac{(1+1)(2+1)}{6}=1$. On a $1^2=\frac{(1+1)(2+1)}{6}$ vraie.
- Supposons que : $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
- Démontrons que : $1^2+2^2+3^2+\cdots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

On a $1^2+2^2+3^2+\cdots+(k+1)^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

Or $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, alors :

$1^2+2^2+3^2+\cdots+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$;

$=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}=\frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6}=\frac{2(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+2)}{6}$;

D'où $1^2+2^2+3^2+\cdots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Comme $P(k+1)$ est vraie, alors $\forall\, n\epsilon N^*,\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $\forall\, n\epsilon N^*, 5^n-n$ est divisible par 5, c'est-à-dire $\exists q\in\mathbb{N}^*$; $n^5-n=5q$

- Vérifions que P(n) : $n^5-n=5q$ est vraie au rang initial :
  Pour $n=1$, $1^5-1=0=5\times 0$ vraie ;
- Supposons que P(n) est vraie au rang k : $k^5-k=5q$

- Démontrons que $P(k+1)$ est vraie : : $(k+1)^5-(k+1)=5q'$; $q' \in \mathbb{N}^*$

On a $(k+1)^5-(k+1)=k^5+5k^4+10k^3+10k^2+4k$ or $k^5-k=5q \Leftrightarrow k^5=k+5q$.

D'où $(k+1)^5-(k+1)=5(q+k+2k^2+2k^3+k^4)$ avec $q'=q+k+2k^2+2k^3+k^4$.

Donc $\forall\ n \epsilon N^*$, 5^n-n est divisible par 5.

Exercice 2 :

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 3 :

Soients deux suites (U_n) et (V_n), à termes strictement positifs, définies par : $0<U_O<V_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1}=\sqrt{U_nV_n}$; $V_{n+1}=\frac{U_n+V_n}{2}$.

1) Calculer ${V_{n+1}}^2-{U_{n+1}}^2$. En déduire que pour tout n$\in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$.
2) Démontrer que (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.
3) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq U_n-V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0-U_0)$.
4) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. Que peut- on dire des suites (U_n) et (V_n)?

Exercice 4 :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_O=0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

1- Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$;
2- Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, que (u_n) est croissante.
3- En déduire la convergence de la suite (u_n) .