TITRE DE LA LEÇON : SUITES ARITHMETIQUES

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Analyse

Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

1- Définition :

Soit (U_n) une suite numérique.
(U_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $U_{n+1} - U_n = r$.
Le nombre réel r est appelé **raison de la suite** (U_n).

2- Sens de variation et convergence d'une suite arithmétique

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r de premier terme U_p

- Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
- Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$
- Si $r = 0$, alors la suite est constante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = U_p$

3- Terme général

Le terme général d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p est donné par :

$$U_n = U_p + (n-p)r$$

Avec p l'indice du premier terme
NB :
Si le premier terme est U_0 , alors le terme général est donné par : $U_n = U_0 + nr$
Si le premier terme est U_1 , alors le terme général est donné par : $U_n = U_1 + (n-1)r$.

4- Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de terme général U_n. Alors :

$S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$, est la somme des termes consécutifs de (U_n).

a) Propriété :

Dans une suite arithmétique, la somme des deux termes équidistants des extrêmes, est égale à la somme des termes extrêmes. C'est-à-dire : $U_0 + U_n = U_1 + U_{n-1} = U_2 + U_{n-2} = \cdots$.

b) Expression de la somme S_n en fonction de n.

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$ (1)

$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + U_{n-3} + \ldots + U_1 + U_0$ (2)

(1)+(2) : $2S_n = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + (U_2 + U_{n-2}) + (U_3 + U_{n-3}) + \cdots + (U_n + U_0)$

or $(U_1 + U_{n-1}) = (U_2 + U_{n-2}) = (U_3 + U_{n-3}) = \cdots = U_0 + U_n$

alors $2S_n = (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \cdots + (U_0 + U_n)$

$$2S_n = (n+1)(U_0 + U_n)$$

Donc : $S_n = \frac{(n+1)}{2}(U_0 + U_n)$

D'une manière générale :

$$S_n = \frac{(n-p+1)}{2}(U_p + U_n)$$

U_p : 1er terme ; dernier terme U_n

$N_t = n - p + 1$: nombre de termes

5- **Termes en progression arithmétique**

Trois termes a, b et c, rangés dans cet ordre, sont en progression arithmétique si, et seulement si $b = \frac{a+c}{2} \Leftrightarrow a + c = 2b$.

NB : La raison de la suite est donnée par $r = b - a = c - b$.:

Exercice 1 :

(v_n) est une suite arithmétique telle que : $v_{16} = 40$ et $v_{50} = 142$

1-Déterminer son premier terme $v_O$et sa raison. Exprimer v_n en fonction de n.

2-Déterminer l'entier naturel n tel que : $v_n = 85$. Encadrer 47 entre deux termes consécutifs de la suite (v_n).

3- Calculer les sommes : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S = v_8 + v_9 + \cdots + v_{41}$.

Exercice 2 :

On définit les suites (u_n) et (v_n) par : $u_O = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$; $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

1. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. Exprimer v_n et u_n en fonction de n. Calculer, alors la limite de la suite (v_n).

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_O = 1$et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}= \frac{u_n}{1+2u_n}$. On pose : $v_n= \frac{1}{u_n}$, pour tout entier naturel n.

1-Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison. Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

2-Calculer la somme : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ en fonction de n.

3- Montrer que la suite de terme général w_n telle que : $w_{n+1}= \frac{1}{1-w_n}$, est périodique, de période à déterminer.