TITRE DE LA LEÇON : SUITES GEOMETRIQUES

Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Analyse
Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

1- Définition :

Soit (U_n) une suite numérique.

(U_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $U_{n+1} = qU_n$

Le nombre réel q est appelé **raison de la suite** (U_n).

2- Terme général

Le terme général d'une suite géométrique de raison q et de premier terme U_p est donné par :

$U_n = U_p q^{n-p}$; avec p l'indice du premier terme

NB :

Si le premier terme est U_0 , alors le terme général est donné par : $U_n = U_0 q^n$

Si le premier terme est U_1 , alors le terme général est donné par : $U_n = U_1 q^{n-1}$.

3- Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de terme général U_n. Alors :

$S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$, est la somme des termes consécutifs de (U_n).

Expression de la somme S_n en fonction de n.

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$ (1)

$qS_n = qU_0 + qU_1 + qU_2 + qU_3 + \cdots + qU_n$ or $qU_0 = U_1$; $qU_1 = U_2, \ldots$; $qU_{n-1} = U_n$; $qU_n = U_{n+1}$

On a : $qS_n = U_1 + U_2 + U_3 + + \cdots + U_n + U_{n+1}$

(1)-(2) : $(1-q)S_n = U_0 - U_{n+1}$ or $U_{n+1} = qU_n$ et $U_n = U_0 q^n$

$(1-q)S_n = U_0 - U_0 q^{n+1}$. Donc : $S_n = \frac{U_0}{1-q}(1-q^{n+1})$

D'une manière générale : $S_n = \frac{U_p}{1-q}[(1-q^{n-p+1})]$

U_p : 1er terme ; dernier terme U_n ; $N_t = n - p + 1$: nombre de termes

4- Termes en progression géométrique

Trois termes a, b et c, rangés dans cet ordre, sont en progression géométrique si , et seulement si $b^2 = a.c$.

NB : La raison de la suite est donnée par : $q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

5- Convergence d'une suite géométrique

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q de premier terme U_p

- Si $-1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$;
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$;
- Si $q \leq -1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe.

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_O = 2, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$.
On pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.
1. Montrer que la suite de terme général v_n, est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
2. Calculer la somme : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de u_1 et de u_n, puis en fonction de n.
3. Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_O = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 3$.
On pose : v_n=$au_n + 6$, pour tout entier naturel n ; $a \in \mathbb{R}^*$.
1- Déterminer a pour que la suite (v_n) soit géométrique. Etudier, alors sa convergence.
2-Calculer la somme : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n, pour la valeur de a trouvée au n°1.
3-Représenter graphiquement les 7 premiers termes de la suite (u_n).

Exercice 3 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0, U_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = \frac{2}{5}U_{n+1} + \frac{3}{5}U_n$
On pose $V_n = U_{n+1} - U_n$.
a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Exprimer V_n en fonction de n.
b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

Exercice 4 :

Déterminer trois termes consécutifs a, b et c en progression géométrique tels que :

$a + b + c = 2106$ et $a - b + c = 1134$. Quelle est la raison de cette suite.

Exercice 5 :

(u_n) est une suite géométrique de raison q définie par : $8u_O = 27u_3$
1-Exprimer u_3 en fonction de u_O et q. Calculer q et exprimer u_n en fonction de n.
2- Calculer la somme : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n.