TITRE DE LA LEÇON : SYSTEMES LINEAIRES DANS $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Niveau : Lycée - Classes : Premières C et D

I- Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues

1- **Forme générale :** $(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$; où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels tels que :$(a;b)\neq(0;0)$ et $(a';b')\neq(0;0)$

2- **Résolution**

Pour résoudre le système (S) on peut utiliser la méthode graphique ou les méthodes algébriques : Combinaison linéaire (ou addition), substitution, comparaison et utilisation de la de règle de Cramer

- **Règle de Cramer**

Soit le système : $(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Le déterminant principal du système est : $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$.

-Si $\Delta\neq 0$, le système est dit de Cramer et admet une solution unique $(x;y)$ donnée par les formules :

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$; avec $\Delta_x=\begin{bmatrix} c & b \\ c' & b' \end{bmatrix}=cb'-bc'$;$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-ca'$. Donc $S=\{(x;y)\}$

-Si $\Delta=0$, alors le système n'a pas de solution ou admet une infinité de solutions.

✓ $si\ \Delta_x\neq 0$ et $\Delta_y\neq 0$, alors $S=\emptyset$.

✓ $si\ \Delta_x=0$ et $\Delta_y=0$, alors : $S=\mathbb{R}^2$.

3-Systèmes de trois équations du premier degré à deux inconnues :

$$(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \\ a''x+b''y=c'' \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système, on résout d'abord le système extrait de la forme : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ et on trouve le couple de solution $(x_0;y_0)$;

On vérifie que $(x_0;y_0)$ est solution de l'équation : $a''x+b''y=c''$

Si $(x_0;y_0)$ vérifie : $a''x+b''y+c''=0$, alors$(x_0;y_0)$ est solution de (S) et $S=\{(x_0;y_0)\}$.

Si $(x_0;y_0)$ ne vérifie pas : $a''x+b''y+c''=0$, alors (S) n' a pas de solution et $S=\emptyset$.

4-Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues utilisant les inconnues auxiliaires

Lorsque les équations composant le système ne sont pas linéaires, alors on peut s'y ramener à l'aide d'inconnues auxiliaires.

Exemple : Pour résoudre un système de la forme : $\begin{cases} \frac{a}{x+t}+\frac{b}{y+k}=c \\ \frac{a'}{x+t}+\frac{b'}{y+k}=c' \end{cases}$, on pose : $\frac{1}{x+t}=X$ et $\frac{1}{y+k}=Y$ et le système se ramène à : $\begin{cases} aX+bY=c \\ a'X+b'Y=c \end{cases}$. On résout ce dernier système pour déterminer X et Y.

Enfin, on détermine x et y en remplaçant X et Y dans les équations : $\frac{1}{x+t}=X$ et $\frac{1}{y+k}=Y$.

II- Systèmes d'équations du premier degré à trois inconnues

1- **Forme générale :** $(S)\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$; où a, b, c, a', b' , c', d et d' sont des nombres réels tels que :$(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et $(a';b';c')\neq(0;0;0)$

2- **Résolution**

Pour résoudre le système (S) on peut utiliser les méthodes suivantes: substitution, Pivot de Gauss et utilisation de la de règle de Sarrus.

- **Règle de Sarrus**

Soit le système : $(S)\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$;

Le déterminant principal du système est : $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$.

-Si $\Delta\neq 0$, le système est dit de Cramer et admet une solution unique $(x;y)$ donnée par les formules :

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$; $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$; avec $\Delta_x=\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$; $\Delta_y=\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}$;$\Delta_z=\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$

Donc $S=\{(x;y;z)\}$

-Si $\Delta=0$, alors le système n'a pas de solution ou admet une infinité de solutions.

- ✓ $si\ \Delta_x\neq 0$ et $\Delta_y\neq 0$, alors $S=\emptyset$.
- ✓ $si\ \Delta_x=0$ et $\Delta_y=0$, alors : S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$.

Remarque :

On utilise la règle de Sarrus si le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues.

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, chacun des systèmes suivants :

1)$\begin{cases} 2x+2y-10=0 \\ 5x-y=7 \end{cases}$; 2)$\begin{cases} 2x+y-8=0 \\ x-3y+3=0 \\ 3x-2y-5=0 \end{cases}$;3)$\begin{cases} x^2-y=2 \\ 3x^2+y=14 \end{cases}$; 4)$\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 5x-2y=17 \end{cases}$

5)$\begin{cases} 2x^2-y=1 \\ x^2+y=0 \end{cases}$ 6)$\begin{cases} \frac{2}{x-2}+\frac{3}{y+1}=-1 \\ \frac{1}{x-2}-\frac{1}{y+1}=2 \end{cases}$;7)$\begin{cases} (2x+y-3)(x+2y-1)=0 \\ 3x-2y+5=0 \end{cases}$.

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x+y-2z=7 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$;b) $\begin{cases} 2x-y-2z=6 \\ x+y-z=1 \\ x-5y-z=9 \end{cases}$;c) $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=1 \\ -2x+y+z=1 \end{cases}$;d) $\begin{cases} x-2y+z=-5 \\ -x+y+2z=-4 \end{cases}$

Solution:

Résolution du système: $\begin{cases} x+y-2z=7\ (1) \\ 2x-y+z=0\ (2) \\ 3x+y+z=8\ (3) \end{cases}$ en utilisant la méthode de Pivot de Gauss.

- Elimination de x en considérant les équations (1) et (2)
- $2\times(1)-(2)$: $3y-5z=14\ (4)$
- Elimination de x en considérant les équations (1) et (3)

- $3 \times (1) - (3) : 2y - 7z = 13\ (5)$
- Elimination de y en considérant les équations (4) et (5),
- $2 \times (4) - 3 \times (5) : z = 1\ (6)$

On obtient le système triangulaire : $\begin{cases} x + y - 2z = 7\ (1) \\ 2y - 7z = 13\ (5) \\ z = -1\ (6) \end{cases}$

En remontant en cascade, on trouve : $z = -1$, $y = 3$ et $x = 2$; $S = \{(2; 3; -1)\}$;

NB : Lorsqu'il est impossible d'obtenir un pivot non nul, on dit que la méthode de Gauss se bloque : le système initial est cependant équivalent au système final(ou système trouvé)