

TITRE DE LA LEÇON : ELEMENTS D'ETUDE D'UNE FONCTION NUMERIQUE
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Analyse
Niveau : Lycée

-

Classes : Terminales A
I- LIMITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ se lit : limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 .

1- Limites usuelles : Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel a , on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty ;$$

2- Opérations sur les limites.

 Soient l et l' deux réels non nuls, limites respectives de deux fonctions f et g . On a le tableau suivant.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$\pm\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x)$	$l \times l'$		∞	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	F.I	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$		∞			F.I	∞	0	F.I

Remarques :

- $+\infty \times l = \begin{cases} +\infty, & \text{si } l > 0 \\ -\infty, & \text{si } l < 0 \end{cases}$
- Les résultats de la forme " $\infty - \infty$ ", " $\infty \times 0$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ " ne sont pas connus a priori ; ce sont des formes indéterminées (F.I). Pour lever l'indétermination, on peut envisager la *factorisation* puis la *simplification*, la *conjugaison (expression conjuguée)* ou le *changement de variable*.

 Exercice1 Calcule les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 7x + 4)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 2x}{x-1}\right)$;

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^2 - 2x}{x-1}\right)$

 Solution : a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 7x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 = +\infty$ ou bien

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 7x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-5 + \frac{7}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 2x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$; ou bien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 2x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = +\infty$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^2 - 2x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2$

Exercice2 : Calculer la limite de la fonction f au point indiqué, dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{2x^2 + 3x - 10}; x_0 = 2; f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2x^3 + x + 2}, x_0 = -\infty; f(x) = (\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x), x_0 = -\infty;$$

$$f(x) = (x - \sqrt{x^2 + 1}), x_0 = +\infty; f(x) = (\sqrt{3-x} - \sqrt{2-x}), x_0 = -\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x-2}, x_0 = 2^-; f(x) = \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}, x_0 = 2; f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}}, x_0 = -\infty;$$

$$f(x) = \frac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}}, x_0 = 3$$

$$f(x) = \frac{3x^3 + 3x^2 - 15x + 9}{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}, x_0 = 1;$$

III- CONTINUITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

1- Continuité en un point d'abscisse x_0

f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe (f est définie en x_0) et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2- Continuité à gauche et à droite

- f est continue à gauche de x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

- f est continue à droite de x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Conséquence : f est continue en x_0 si et seulement si : $\begin{cases} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

Exercice1 On considère la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$. Etudier la continuité de g en $x_0 = 1$.

Solution :

- g est définie $\Leftrightarrow |1 - x^2| \geq 0$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}, |1 - x^2| \geq 0$. Donc $E_g =]-\infty; +\infty[$;
- $g(1) = \sqrt{|1 - 1^2|} = 0$
- $\begin{cases} g(x) = \sqrt{x^2 - 1}; & \text{si } x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ g(x) = \sqrt{1 - x^2}; & \text{si } x \in [-1; 1] \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0$;

· $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$, alors g est continue en $x_0 = 1$.

IV- DERIVATION

1- Dérivabilité en un point d'abscisse x_0 .

- f est dérivable en x_0 si et seulement si : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ ($l \in \mathbb{R}$).

NB Le réel l (fini) est appelé nombre dérivé de f en x_0 , noté $f'(x_0)$ on écrit : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

• Conséquences graphique :

Si f est dérivable en x_0 , le graphique (ou la courbe) de f admet une tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$, de coefficient directeur $f'(x_0)$:

1^{er} cas : si $f'(x_0) = 0$, alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses (Ox).

2^e cas : si $f'(x_0) = l \neq 0$, alors cette tangente a pour

équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

3^e cas : si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées (Oy).

2- Dérivabilité à gauche et à droite de x_0

- f est dérivable à gauche de x_0 si et seulement si : $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$; ($l \in \mathbb{R}$).
- f est dérivable à droite de x_0 si et seulement si : $f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l'$ ($l' \in \mathbb{R}$).

Remarques :

- Si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_0 .
- Si $f'_g(x_0) = l \neq f'_d(x_0) = l'$; $l, l' \in \mathbb{R}$ alors f n'est pas dérivable en x_0 .
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0 .

NB : Toute fonction dérivable est continue mais, toute fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

3- Calculs des dérivées

Fonction f	$u + v$	uv	$\frac{u}{v}$	\sqrt{u}	u^n	$\frac{1}{u}$
Dérivée f'	$u' + v'$	$u'v + uv'$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$nu'u^{n-1}$	$-\frac{u'}{u^2}$

Exercice On considère la fonction g définie par $f(x) = \frac{3x-5}{x+1}$; :



- 1- Déterminer l'ensemble de définition E_f de f , puis calculer les limites aux bornes de E_f .
- 2- Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 0$, puis en déduire une interprétation géométrique.
- 3- Calculer la dérivée de f dérivable.
- 4- Dresser le tableau de variation de f .

V- BRANCHES INFINIES ET COURBES DES FONCTIONS ASSOCIEES AUX FONCTIONS DONNEES

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- Branches infinies : Soit f une fonction définie sur : $E_f =]-\infty; x_0[\cup]x_0; +\infty[$

si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$,	Alors la droite d'équation : $x = x_0$ est une asymptote « verticale » à la courbe (C) de f	
si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0$	Alors la droite d'équation : $y = y_0$ est une asymptote « horizontale » à la courbe (C) de f au voisinage de $\pm\infty$	
si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et	$\begin{cases} \text{si } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a; a \in \mathbb{R}^* \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b; b \in \mathbb{R} \end{cases}$	Alors la droite d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote « oblique » à la courbe (C) de f au voisinage de ∞
	$\begin{cases} \text{si } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a; a \in \mathbb{R}^* \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty \end{cases}$	Alors la droite d'équation : $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe (C) de f au voisinage de ∞ ou (C) admet une branche parabolique de direction : $y = ax$
	si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	Alors la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de ∞
	si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$	Alors la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de ∞

Remarque

-Pour montrer que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de ∞ , on montre que : $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

-Pour étudier la position de (C) par rapport à (D), on étudie le signe de $f(x) - y = f(x) - (ax + b)$

- ✓ Si $(x) - y < 0$, alors (C) est en dessous de (D) ;
- ✓ Si $(x) - y > 0$, alors (C) est au-dessus de (D) ;
- ✓ Si $(x) - y = 0$, alors (C) et (D) se coupent en un point.