TITRE DE LA LEÇON : CALCULS DANS $\mathbb{R}$: MULTIPLES ET DIVISEURS DES NOMBRES ENTIERS NATURELS

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Niveau : Lycée - Classes : Terminales A

1- Définition

Définition : Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls.
Si $c = a \times b$, alors c est un multiple de a et de b ; a et b sont les diviseurs de c

Exemple: $98 = 49 \times 2$: 98 est un multiple de 49 et de 2 ; 49 et 2 sont les diviseurs de 98

2- Ensembles de multiples et de diviseurs d'un entier naturel a

On note : $\boldsymbol{a}\mathbb{N}$ **et** $\boldsymbol{D}_{(\boldsymbol{a})}$ ou $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{a}}$, respectivement , les ensembles des multiples et diviseurs de **a**

Pour déterminer l'ensemble des multiples de **a,** on effectue la table de multiplication par **a.**

Exemple : $\mathbf{12}\mathbb{N} = \{12 \times 0,\ \ 12 \times 1,\ \ 12 \times 2,\ \ 12 \times 3, \ldots.\}$

Donc : $\mathbf{12}\mathbb{N} = \{0,\ 12,\ 24, 36, \ldots.\}$

Pour déterminer l'ensemble des diviseurs de **a,** on effectue la table de division par a**.**

Exemple : $\boldsymbol{D}_{(\mathbf{12})} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6, 12.\}$

3- Multiples et diviseurs communs de deux entiers naturels

On note : $\boldsymbol{a}\mathbb{N} \cap \boldsymbol{b}\mathbb{N}$ **et** $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{a}} \cap \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{b}}$ respectivement, les ensembles des multiples et des diviseurs communs à **a** et **b**

Exemple :

a) $\mathbf{2}\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \ldots.\}$; $\mathbf{4}\mathbb{N} = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \ldots.\}$

Donc : $\mathbf{2}\mathbb{N} \cap \mathbf{4}\mathbb{N} = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots.\}$

b) $\boldsymbol{D}_{(\mathbf{12})} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12.\}$; $\boldsymbol{D}_{(\mathbf{36})} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.\}$

Donc : $\boldsymbol{D}_{\mathbf{12}} \cap \boldsymbol{D}_{\mathbf{36}} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12.\}$

NB :

- Le PPCM (Plus Petit Commun Multiple) de deux entiers naturels **a** et **b**, est le plus petit des multiples communs, non nuls à ces deux entiers naturels. On le note : $PPCM(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b})$ ou $PPCM(\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{a})$.
  Exemple $M(2\,;4) = 4$.
- Le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels **a** et **b**, est le plus grand des diviseurs communs à ces deux entiers naturels. On le note : $PGCD(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b})$
  Ou $PGCD(\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{a})$.Exemple $PGCD(12\,;36) = 12$.

4- Décomposition d'un nombre entier naturel en produit de facteurs premiers

Pour décomposer un nombre entier naturel non premier, en produit de facteurs premiers, on le divise par des nombres premiers successifs, pris dans l'ordre croissant : (2,3,5,7,11,13,…), en appliquant le caractère de divisibilité .

Remarque : On arrête les divisions quand on obtient un quotient égal à 1.

Exemple : Décomposons 450 en produit de facteurs premiers.

450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Donc $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$.(Ecriture primaire, elle est unique)

Exercice : Décomposer : 420 ; 336 ; 180 ; 144 ; 168 en produit de facteurs premiers.

5- Détermination du PGCD et du PPCM

Pour déterminer le PGCD ou le PPCM de deux entiers naturels **a** et **b** :

- On décomposés a et b en produit de facteurs premiers ;
- Pour le PGCD, on effectue le produit de tous les facteurs premiers communs à ces décompositions, chacun des facteurs communs étant pris une seule fois et avec son plus petit exposant.
- Pour le PPCM, on effectue le produit de tous les facteurs premiers communs et non communs à ces décompositions, chacun des facteurs communs étant pris une seule fois et avec son plus grand exposant.

Exemple : $18 = 2 \times 3^2$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$. Alors $PGCD(18\,;84) = 2 \times 3 = 6$
et $PPCM(18\,;84) = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$.

Propriétés :

✓ $PGCD(ka\,;kb) = k.PGCD(a\,;b)$; $PPCM(ka\,;kb) = k.PPCM(a\,;b)$; $k \in \mathbb{N}^*$

✓ $PGCD(a\,;b) \times PPCM(a\,;b) = a \times b$

Exercice1 En utilisant les décompositions de a et b, en produit de facteurs premiers, détermine le $PPCM(a\,;b)$ et le $PGCD(a\,;b)$, dans chacun des cas suivants :

a) $a = 50\,;b = 75$; b) $a = 40\,;b = 60$; c) $a = 180\,;b = 144$; d) $a = 1680\,;b = 3360$

Exercice2

a- Détermine l'ensemble des diviseurs de 48 er celui des diviseurs de 72

b- Trouve l'ensemble des diviseurs communs à 48 et 72.

c- En déduire le $PGCD(48; 72)$