TITRE DE LA LEÇON : EQUATIONS ET INEQUATIONS SE RAMENANT AU SECOND DEGRE

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Niveau : Lycée - Classes : Terminales A

I- Rappel : Racines et factorisation des polynômes

1- **Définition1 :** On appelle racine ou zéro d'un polynôme $P(x)$, tout réel α tel que : $P(\alpha) = 0$. Pour déterminer les racines de P, on résout l'équation $P(x) = 0$.

2- **Théorème :** Le réel α est une racine du polynôme f si, et seulement si, f(x) est factorisable (ou divisible) par $x - \alpha$ .C'est-à-dire, α est racine de f ($f(\alpha) = 0$) si, et seulement si, il existe un polynôme q tel que, pour tout réel x, $f(x) = (x - \alpha) \times q(x)$; $\deg f = 1 + degq \Leftrightarrow \deg q = degf - 1$.

NB : Pour déterminer le quotient q, on peut utiliser les méthodes suivantes : Horner, division euclidienne, coefficients indéterminés(identification des coefficients) ,

Si les p réels α_0, α_1, …, α_p sont les racines distinctes deux à deux d'un polynôme non nul f, alors il existe un polynôme g tel que, pour tout réel x : $f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_p) \times g(x)$ tel que : $\deg g = degf - p$

I- Equations et inéquations de degré 3

Soit P un polynôme du troisième degré de la forme : P$(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$; $a_3 \neq 0$

- Pour résoudre l'équation P$(x) = 0$, on trouve d'abord une racine α du polynôme P, puis on factorise P(x) par $x - \alpha$: P$(x) = (x - \alpha).Q(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$. Le quotient :
  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ est déterminer à l'aide des méthodes suivantes : Schéma de Horner, division euclidienne, coefficients indéterminés (méthode d'identification des coefficients),
- Pour résoudre les inéquations P$(x) \leq 0$, P$(x) < 0$, P$(x) \geq 0$ ou P$(x) > 0$, on factorise d'abord le polynôme $P(x)$, puis on étudie son signe.

II- Equations et inéquations bicarrées

- Pour résoudre une équation bicarrée (équation de la forme : $ax^4 + bx^2 + c = 0; a \neq 0$), on procède par un changement d'inconnue ou de variable, en posant : $x^2 = t;\ t \geq 0$. L'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se ramène alors à l'équation : $at^2 + bt + c = 0$.
- Pour résoudre les inéquations bicarrées , on factorise d'abord le polynôme $ax^4 + bx^2 + c$, en posant : $x^2 = t;\ t \geq 0$, puis on étudie le signe de $ax^4 + bx^2 + c$.

EXERCICE 1 : On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = -3x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$

1- a) Montrer que $P(-2) = 0$, puis factorise $P(x)$ (
   b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.
   c) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
   $-3(\ln(-x))^3 - (\ln(-x))^2 + 8\ln(-x) - 4 = 0$

2- a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système d'équations linéaires : (S) $\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 2x + y \quad = 2 \end{cases}$.
   b) En déduire dans $\mathbb{R}^2$, les solutions du système : $\begin{cases} -e^x + 3e^y = 5 \\ 2e^x + e^y \quad = 2 \end{cases}$

EXERCICE 2 Le but de cet exercice, est de résoudre les équations, les inéquations et les systèmes d'équations.

On considère le polynôme P défini par : P(x) = $-x^3 + 7x^2 - 15x + 9$.

1- a) Déterminer les réels a , b , c tels que : $\mathrm{P(x)} = (\mathrm{x} - 1)(\mathrm{a}x^2 + bx + c)$. On utilisera le schéma d'Horner.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation P(x) = 0
   c) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$, de l'équation : $-e^{3x} + 7\, e^{2x} - 15e^x + 9 = 0$.
2- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation P(x) > 0
3- a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système (S) :
   $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$
   b) En déduire dans $\mathbb{R}^2$, la résolution du système : $\begin{cases} 3\ln x - \ln y = 5 \\ \ln x - 2\ln y = 3 \end{cases}$