TITRE DE LA LEÇON : SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES
Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre
Niveau : Lycée - Classes : Terminales A

I- SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES

Soit le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a^{'}x+b^{'}y=c^{'} \end{cases}$; où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels

Le déterminant principal du système est : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab^{'} - a'b$

-Si $\Delta \neq 0$, le système est de Cramer et admet une solution unique $(x;y)$ donnée par les formules :

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} c & b \\ c' & b' \end{bmatrix}}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}$; $S=\{x;y\}$ avec $\Delta_x = \begin{bmatrix} c & b \\ c' & b' \end{bmatrix}$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

-Si $\Delta = 0$ le système n'a pas de solution ou est indéterminé

$-\,si\ \Delta_x \neq 0;\ \Delta_y \neq 0$ Alors $S=\emptyset$

$-\,si\ \Delta_x = 0;\ \Delta_y = 0$ Alors : $S=\mathbb{R}^2$

Remarque Pour résoudre à deux inconnues, on peut aussi utilisées les méthodes connues : Addition, substitution, comparaison.

Résolution des systèmes auxiliaires

La méthode implique l'utilisation d'un changement d'inconnues afin de faciliter la résolution.

Exercices d'application : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes ci- après : 1) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 5x-2y=17 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2-y=1 \\ x^2+y=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{2}{x-2}+\frac{3}{y+1}=-1 \\ \frac{1}{x-2}-\frac{1}{y+1}=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2\sqrt{3}+y^2=\sqrt{3} \\ 3x^2+y^2\sqrt{3}=3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3\sqrt{x}+15\sqrt{y}=1 \\ 2\sqrt{x}+10\sqrt{y}=-1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x^2-2y^2=14 \\ -3x^2+5y^2=3 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2(x-3)+3(y-1)=2 \\ 3(x-3)+4(y-1)=-2 \end{cases}$

Solutions

1) $\begin{cases} 2x^2-y=1 \\ x^2+y=0 \end{cases}$ Posons : $X=x^2\ et\ Y=y^2$ on a : $\begin{cases} 2X-Y=1 \\ X+Y=0 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1=3$;

$\Delta_X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow X=\frac{1}{3}$ $\Delta_Y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow Y=-\frac{1}{3}$; $x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; $y=-\frac{1}{3}$; $S=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{3}\right)\right\}$

II- SYSTEMES DE TROIS EQUATIONS A TROIS INCONNUES

Soit le système : $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$;

Pour résoudre dans $\mathbb{R}^3$ un tel système, on peut utiliser les méthodes suivantes : Substitution , Pivot de Gauss (simplifiée : méthode par association : On associe la première équation avec la deuxième et on élimine une inconnue, ensuite la première avec la troisième et on élimine la même inconnue enfin, on associe les deux dernières équations obtenues)

Exercice Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$