TITRE DE LA LEÇON : ELEMENTS D'ETUDE D'UNE FONCTION NUMERIQUE
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Analyse
Niveau : Lycée - Classes : Terminales A

I- LIMITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ se lit : limite de f}(x) \text{ quand } x \text{ tend vers } x_0.$$

1- Limites usuelles :

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel a, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \,; \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \,;$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty, \text{si } n \text{ est impair} \end{cases};$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty, \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}; \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty;$$

2- Opérations sur les limites.

Soient l et l' deux réels non nuls, limites respectives de deux fonctions f et g. On a le tableau suivant.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0	0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x)$	$l \times l'$	∞		$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	F.I	0
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	∞		F.I			∞	0	F.I

Remarques :

- $+\infty \times l = \begin{cases} +\infty, \text{si } l > 0 \\ -\infty, \text{si } l < 0 \end{cases}.$
- Les résultats de la forme " $\infty - \infty$", "$\infty \times 0$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$\frac{0}{0}$" ne sont pas connus à priori ; ce sont des formes indéterminées (F.I). Pour lever l'indétermination, on peut envisager la *factorisation* puis la *simplification,* la *conjugaison (expression conjuguée)* ou le *changement de variable.*

Exercice1 Calcule les limites suivantes : $a)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^3 + 7x + 4)$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2+2x}{x-1}\right)$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{2x^2-2x}{x-1}\right)$

Solution : $a)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^3 + 7x + 4) = \lim\limits_{x \to -\infty} -5x^3 = +\infty$ ou bien

$$\lim_{x \to -\infty} (-5x^3 + 7x + 4) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(-5 + \frac{7}{x^2} + \frac{4}{x^3} = +\infty\right)$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+2x}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$; ou bien

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+2x}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=+\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{1+\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}$.

d) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2x^2-2x}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}2x=2$

Exercice2 : Calculer la limite de la fonction f au point indiqué, dans chacun des cas suivants :

$f(x)=\frac{x^3-7x+6}{2x^2+3x-10}$; $x_o=2$; $f(x)=\frac{x^2-x+1}{2x^3+x+2}$, $x_o=-\infty$; $f(x)=\left(\sqrt{x^2+3x-2}+x\right)$, $x_o=-\infty$;

$f(x)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$, $x_o=+\infty$; $f(x)=\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{2-x}\right)$, $x_o=-\infty$

$f(x)=\frac{x^2-x-1}{x-2}$, $x_o=2^-$; $f(x)=\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$, $x_o=2$; $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$, $x_o=-\infty$;

$f(x)=\frac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}}$, $x_o=3$

$f(x)=\frac{3x^3+3x^2-15x+9}{2x^3-5x^2+4x-1}$, $x_o=1$;

III- CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

1- Continuité en un point d'abscisse x_0

f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe (f est définie en x_0) et $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

2- Continuité à gauche et à droite

- f est continue à gauche de x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$
- f est continue à droite de x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

Conséquence : f est continue en x_0 si et seulement si : $\begin{cases} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\end{cases}$

Exercice1 On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{|1-x^2|}$. Etudier la continuité de g en $x_0=1$.

Solution :

- g est définie$\Leftrightarrow |1-x^2|\geq0$. Or, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|1-x^2|\geq0$. Donc $E_g=]-\infty;+\infty[$;
- $g(1)=\sqrt{|1-1^2|}=0$
- $\begin{cases} g(x)=\sqrt{x^2-1}\,;si\ x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\\ g(x)=\sqrt{1-x^2};\quad si\ x\in[-1;1]\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x^2-1}=0$;
- $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=g(1)$, alors g est continue en $x_0=1$.

IV- DERIVATION

1- Dérivabilité en un point d'abscisse x_0.

- f est dérivable en si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \ (l \in \mathbb{R})$.

NB Le réel ℓ (fini) est appelé nombre dérivé de f en x_0, noté $f'(x_0)$ on écrit :$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

- **Conséquences graphique :**

Si f est dérivable en x_0, le graphique (ou la courbe) de f admet une tangente au point $\mathrm{M}_0(x_0; f(x_0))$, de coefficient directeur $f'(x_0)$:

1er cas : si $f'(x_0) = 0$, alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses (Ox).

2e cas : si $f'(x_0) = l \neq 0$, alors cette tangente a pour équation : $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.

3e cas : si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, alors la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées (Oy).

2- Dérivabilité à gauche et à droite de x_0

- f est dérivable à gauche de x_o si et seulement si : $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l; \ (l \in \mathbb{R})$.
- f est dérivable à droite de x_o si et seulement si : $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l' \ (l' \in \mathbb{R})$.

Remarques :

- Si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_o.
- Si $f'_g(x_0) = \ell \neq f'_d(x_0) = \ell'; l, l' \in \mathbb{R}$ alors f n'est pas dérivable en x_o.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0.

NB : Toute fonction dérivable est continue mais, toute fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

3- Calculs des dérivées

Fonction f	$u+v$	uv	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	$\frac{1}{u}$
Dérivée f'	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$\frac{u'v-uv'}{V^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$nu'u^{n-1}$	$\frac{-u'}{u^2}$

Exercice On considère la fonction g définie par $f(x) = \frac{3x-5}{x+1}$; :

1- Déterminer l'ensemble de définition E_f de f, puis calculer les limites aux bornes de E_f
2- Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 0$, puis en déduire une interprétation géométrique.
3- Calculer la dérivée de f dérivable.

4- Dresser le tableau de variation de f.

V- BRANCHES INFINIES ET COURBES DES FONCTIONS ASSOCIEES AUX FONCTIONS DONNEES

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1- Branches infinies : Soit f une fonction définie sur : $E_f =]-\infty; x_0[\cup]x_0; +\infty[$

si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$,	Alors la droite d'équation : $x = x_0$ est une asymptote « verticale » à la courbe (C) de f	
si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0$	Alors la droite d'équation : $y = y_0$ est une asymptote « horizontale » à la courbe (C) de f au voisinage de $\pm\infty$	
si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et	$\begin{cases} \text{si} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a; a \in \mathbb{R}^* \\ \text{et} \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax] = b; b \in \mathbb{R} \end{cases}$	Alors la droite d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote « oblique» à la courbe (C) de f au voisinage de ∞
	$\begin{cases} \text{si} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a; a \in \mathbb{R}^* \\ \text{et} \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax] = \infty \end{cases}$	Alors la droite d'équation : $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe (C) de f au voisinage de ∞ ou (C) admet une branche parabolique de direction : $y = ax$
	si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	Alors la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de ∞
	si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$	Alors la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de ∞

Remarque

-Pour montrer que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de ∞, on montre que : $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$.

-Pour étudier la position de (C) par rapport à (D), on étudie le signe de $f(x) - y = f(x) - (ax + b)$

- ✓ Si $(x) - y < 0$, alors (C) est en dessous de (D) ;
- ✓ Si $(x) - y > 0$, alors (C) est au-dessous de (D) ;
- ✓ Si $(x) - y = 0$, alors (C) et (D) se coupent en un point.