

TITRE DE LA LEÇON : EQUATIONS ET INEQUATIONS SE RAMENANT AU SECOND DEGRE

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Niveau : Lycée - Classes : Terminale A

I- Rappel : Racines et factorisation des polynômes

1- Définition1 : On appelle racine ou zéro d'un polynôme $P(x)$, tout réel α tel que : $P(\alpha) = 0$. Pour déterminer les racines de P , on résout l'équation $P(x) = 0$.

2- Théorème : Le réel α est une racine du polynôme f si, et seulement si, $f(x)$ est factorisable (ou divisible) par $x - \alpha$. C'est-à-dire, α est racine de f ($f(\alpha) = 0$) si, et seulement si, il existe un polynôme q tel que, pour tout réel x , $f(x) = (x - \alpha) \times q(x)$; $\deg f = 1 + \deg q \Leftrightarrow \deg q = \deg f - 1$.

NB : Pour déterminer le quotient q , on peut utiliser les méthodes suivantes : Horner, division euclidienne, coefficients indéterminés (identification des coefficients),

Si les p réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les racines distinctes deux à deux d'un polynôme non nul f , alors il existe un polynôme g tel que, pour tout réel x : $f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_p) \times g(x)$ tel que : $\deg g = \deg f - p$

I- Equations et inéquations de degré 3

Soit P un polynôme du troisième degré de la forme : $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$; $a_3 \neq 0$

— Pour résoudre l'équation $P(x) = 0$, on trouve d'abord une racine α du polynôme P , puis on factorise $P(x)$ par $x - \alpha$: $P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$.

Le quotient :

$Q(x) = ax^2 + bx + c$ est déterminé à l'aide des méthodes suivantes : Schéma de Horner, division euclidienne, coefficients indéterminés (méthode d'identification des coefficients),

— Pour résoudre les inéquations $P(x) \leq 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \geq 0$ ou $P(x) > 0$, on factorise d'abord le polynôme $P(x)$, puis on étudie son signe.

II- Equations et inéquations bicarrées

— Pour résoudre une équation bicarrée (équation de la forme : $ax^4 + bx^2 + c = 0$; $a \neq 0$), on procède par un changement d'inconnue ou de variable, en posant : $x^2 = t$; $t \geq 0$. L'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se ramène alors à l'équation : $at^2 + bt + c = 0$.

— Pour résoudre les inéquations bicarrées, on factorise d'abord le polynôme $ax^4 + bx^2 + c$, en posant : $x^2 = t$; $t \geq 0$, puis on étudie le signe de $ax^4 + bx^2 + c$.



EXERCICE 1 : On considère le polynôme P défini sur \mathbb{R} par : $P(x) = -3x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$

1- a) Montrer que $P(-2) = 0$, puis factorise $P(x)$ (

b) Résoudre alors dans \mathbb{R} , l'équation $P(x) = 0$.

c) En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'équation :

$$-3(\ln(-x))^3 - (\ln(-x))^2 + 8\ln(-x) - 4 = 0$$

2- a) Résoudre dans \mathbb{R}^2 , le système d'équations linéaires : (S) $\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$.

b) En déduire dans \mathbb{R}^2 , les solutions du système : $\begin{cases} -e^x + 3e^y = 5 \\ 2e^x + e^y = 2 \end{cases}$

EXERCICE 2 Le but de cet exercice, est de résoudre les équations, les inéquations et les systèmes d'équations.

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = -x^3 + 7x^2 - 15x + 9$.

1- a) Déterminer les réels a , b , c tels que : $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$. On utilisera le schéma d'Horner.

b) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $P(x) = 0$

c) En déduire la résolution dans \mathbb{R} , de l'équation : $-e^{3x} + 7e^{2x} - 15e^x + 9 = 0$.

2- Résoudre dans \mathbb{R} , l'inéquation $P(x) > 0$

3- a) Résoudre dans \mathbb{R}^2 , le système (S) :

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

b) En déduire dans \mathbb{R}^2 , la résolution du système : $\begin{cases} 3 \ln x - \ln y = 5 \\ \ln x - 2 \ln y = 3 \end{cases}$