TITRE DE LA LEÇON : PGCD PAR L'ALGORITHME D'EUCLIDE

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Niveau : Collège - Classe : Cinquième

Activité :

a) Effectue la division euclidienne dans ℕ de 96 par 81.
b) Précise : le dividende, le diviseur, le quotient et le reste dans cette division.
c) Ecris une égalité qui relie le dividende, le diviseur, le quotient et le reste dans cette division.
d) Partant de la division de 96 par 81, effectue successivement les divisions euclidiennes de telle sorte que le diviseur de la division précédente devient le dividende de la division suivante et le reste devient le diviseur, jusqu'à obtenir un reste nul.
e) Identifie le dernier reste non nul.

Je retiens :

— L'algorithme d'Euclide, est un procédé de calcul qui permet de déterminer (ou calculer) le PGCD de deux (grands) nombres entiers naturels par une succession de divisions euclidiennes dans ℕ ;

— Pour déterminer le PGCD de deux entiers naturels non nuls a et b tels que $a > b$, en utilisant **l'algorithme d'Euclide**:

✓ On divise le plus grand entier a par le plus petit entier b ;

✓ On divise ensuite le diviseur de la première division par son reste et ainsi de suite jusqu'à obtenir un reste nul ;

✓ Le $PGCD(a\,;b)$, est donc le dernier reste non nul.

— Connaissant le $PGCD(a\,;b)$, pour calculer le $PPCM(a\,;b)$, on utilise la formule : $PPCM(a\,;b) = \frac{a\times b}{PGCD(a\,;b)}$.

Exemple : $PGCD(420\,;288) = 12$. Donc $PPCM(420\,;288) = \frac{420\times 288}{12} = 10080$

Disposition pratique pour le calcul du $PGCD(420\,;288) = 12$: dernier reste non nul

Quotients		1	2	5	2
Dividendes-diviseurs	420	288	132	24	12
Restes	132	24	12	0	

ou bien :

$$\begin{array}{r|l} 420 & 288 \\ \cline{2-2} 132 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 288 & 132 \\ \cline{2-2} 24 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 132 & 24 \\ \cline{2-2} 12 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

Remarque :

Si la toute première division de a par b donne un reste nul ($r = 0$), alors :

$PGCD(a\,;b) = b$

Si $a = b.q + r$ avec $0 \leq r < b$ et $r \neq 0$, alors :$PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r)$

Exercice 1 :

a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, détermine le $PGCD(a\,;b)$ dans chacun des cas suivants : $a = 44350$ et $b = 20785$;$a = 2378$ et $b = 1769$; $a = 7128$ et $b = 12896$.

$a = 322$ et $b = 112$; $a = 420$ et $b = 216$ b) En déduis le $PPCM(a\,;b)$ dans chaque cas.

Exercice 2 :

1- Ecris la liste des diviseurs de 120 et celle des diviseurs de 126. Donne, alors le $PGCD(120\,;126)$.

2- Décompose 120 et 126 en produits de facteurs premiers, puis calcule le $PGCD(120\,;126)$ et le $PPCM(120\,;126)$

3- En utilisant l'algorithme d'Euclide, retrouve le $PGCD(120\,;126)$, puis en déduis le $PPCM(120\,;126)$