TITRE DE LA LEÇON : SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A DEUX INCONNUES

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Cycle : Collège - Niveau : Troisième

I- RESOLUTION ALGEBRIQUE D'UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A DEUX INCONNUES

1- METHODE PAR COMBINAISON (ou par addition ou encore par élimination)

Activité : On se propose de résoudre le système : $\begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0 \ (1) \\ 2x - 3y + 8 = 0 \ (2 \end{cases}$

a) Multiplie chaque membre de la première équation par -2, puis chaque membre de la deuxième équation par 3 pour obtenir un nouveau système où les coefficients de x sont opposés ;
b) Additionne membre à membre les équations obtenues afin d'éliminer x et calculer y;
c) Multiplie chaque membre de la première équation par -3, puis chaque membre de la deuxième équation par 4 pour obtenir un nouveau système où les coefficients de y sont opposés ;
d) Additionne membre à membre les équations obtenues afin d'éliminer y et calculer x
e) Donne l'ensemble de solution du système proposé.

Je retiens :

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues par combinaison on :

- Multiplie chaque membre de la première équation par le coefficient de x de la deuxième équation, puis chaque membre de la deuxième équation par le coefficient de x de la première équation pour obtenir un nouveau système où les coefficients de x sont opposés ;
- Additionne membre à membre les équations obtenues afin d'éliminer x et calculer y ;
- Multiplie chaque membre de la première équation par le coefficient de y de la deuxième équation, puis chaque membre de la deuxième équation par le coefficient de y de la première équation pour obtenir un nouveau système où les coefficients de y sont opposés ;
- Additionne membre à membre les équations obtenues afin d'éliminer y et calculer x
- Donne l'ensemble de solution du système proposé.

Exercice1

Résous par combinaison le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -2x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

Solution

Je résous, par combinaison le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -2x + 3y = 1 \ \ (1) \\ 3x - 4y = -2 \ \ (2 \end{cases}$$

Procédé1

- Elimination de x (calcule de y)
  $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \ (1) \ \times 3 \\ 3x - 4y = -2 \ (2) \times 2 \end{cases}$
  On obtient le nouveau système : $\begin{cases} -6x + 9y = 3 \ (1) \\ 6x - 8y = -4 \ (2) \end{cases}$
  L'addition membre à membre donne : $y = -1$
- Elimination de y (calcule de x)
  $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \ (1) \ \times 4 \\ 3x - 4y = -2 \ (2) \times 3 \end{cases}$
  On obtient le nouveau système : $\begin{cases} -8x + 12y = 4 \ (1) \\ 9x - 12y = -6 \ (2) \end{cases}$
  L'addition membre à membre donne : $x = -2$

  Donc, l'ensemble de solution est $S = \{(-2 \ ; -1\ )\}$

Procédé2

- Elimination de x (calcule de y)
  $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \ (1) \ \times 3 \\ 3x - 4y = -2 \ (2) \times 2 \end{cases}$
  On obtient le nouveau système : $\begin{cases} -6x + 9y = 3 \ (1) \\ 6x - 8y = -4 \ (2) \end{cases}$
  L'addition membre à membre donne : $y = -1$
- Calcule de x : On remplace $y = -1$ dans (1) ou dans (2) : $-2x + 3(-1) = 1 \ \ (1) \Rightarrow x = -2$
  Donc, l'ensemble de solution est $S = \{(-2 \ ; -1\ )\}$

Exercice2

Résous par combinaison les systèmes équations suivants :

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 3x + 5y = 5 \end{cases}$;$b)$ $\begin{cases} -4x + 3y = -1 \\ \quad 4x - y = 3 \end{cases}$

2- METHODE PAR SUBSTITUTION

Activité : On se propose de résoudre le système :$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \ (1) \\ 4x - 5y + 7 = 0 \ (2 \end{cases}$

a) En utilisant l'équation (1), exprime x en fonction de y
b) Remplace x par son expression dans l'équation (2), puis détermine la valeur de y
c) Dans l'expression de x en fonction de y, remplace y par sa valeur, puis calcule x
d) Donne l'ensemble de solution du système d'équations.

Je retiens :

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues par substitution, on :

- Exprime une inconnue (par exemple x) en fonction de l'autre (par exemple y) dans l'une des équations (par exemple dans l'équation (1)),
- détermine la valeur de y, en remplaçant x par son expression dans l'équation (2) ;
- détermine la valeur de x , en remplaçant y par sa valeur
- Donne l'ensemble de solution du système d'équations proposé

Exercice1

Résous par substitution le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Solution

Je résous, par substitution le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \ (1) \\ 3x + 2y + 1 = 0 \ (2 \end{cases}$$

- J'exprime y en fonction de x dans (1) : $y = 2x + 1$ (3)
- Je remplace y (équation (3)) dans (2) pour déterminer x: $3x + 4x + 2 + 1 = 0$

$$7x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{7}$$

- Je remplace $x = -\frac{3}{7}$ dans (3) pour déterminer y: $y = 2\left(-\frac{3}{7}\right) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{7}$

  Donc, l'ensemble de solution est $S = \left\{\left(-\frac{3}{7}\ ;\frac{1}{7}\ \right)\right\}$

Exercice2

Résous par substitution les systèmes équations suivants :

b) $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 3x + 5y = 5 \end{cases}$;$b)$ $\begin{cases} -4x + 3y = -1 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$

NB :

- ✓ Pour la résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, on peut aussi utiliser la méthode par comparaison : On tire soit x ou y dans les deux équations et on égale les deux expressions obtenues. On résout l'équation en x ou en y obtenue, puis on calcule x et y
- ✓ Pour résoudre un système de trois équations à deux inconnues, on extrait un système formé de deux équations et on le résout. On vérifie si le couple de solution obtenue vérifie la troisième équation. Dans le cas contraire, le système n'a pas de solution
- ✓ Pour résoudre un système auxiliaire, on effectue un changement de variable pour obtenir un système ordinaire.

Exercice

Résous $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} -x - 3y + 11 = 0 \\ 3x + y + 7 = 0 \end{cases}$;$b)$ $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 5x + 7y = 6 \end{cases}$; $c)$ $\begin{cases} 5x - 2y = 9 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$;

$d)\begin{cases} -x - 3y + 11 = 0 \\ 3x + y + 7 = 0 \end{cases}$; $e)\begin{cases} x + 3y + 7 = 0 \\ 2x - y + 21 = 0 \end{cases}$; $f)\begin{cases} -2x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 4y + 2 = 0 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$;

$g)\begin{cases} \frac{5}{x-2} + \frac{4}{y} = 18 \\ \frac{3}{x-2} - \frac{7}{y} = -55 \end{cases}$: système auxilliaire

II- RESOLUTION GRAPHIQUE D'UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A DEUX INCONNUES

Activité : On se propose de résoudre graphiquement le système de deux équations du premier degré à deux inconnues : $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$

On considère(D_1) et (D_2) deux droites d'équations respectives : $3x + y - 6 = 0$ $et\ x - y + 2 = 0$

a) A$(x; 0)$ et B$(0; y)$ sont deux points de la droite$(D1\ ): 3x + y + 2 = 0$

Détermine $x\ et\ y$ puis complète le tableau suivant :

	A	B
x		
y		

b) E$(x; 0)$ et F$(0\ ; y)$ sont deux points de la droite$(D2)$: $x - y + 2 = 0$

Détermine x et y puis complète le tableau suivant :

	E	F
x		
y		

c) Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

- Place les points A, B, E et F, puis trace les droites (D_1) et (D_2)
- Etudie la position relative des droites (D_1) et (D_2). Si ces droites sont sécantes, détermine alors leur point d'intersection.

Je retiens :

Pour résoudre graphiquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues de la forme : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$, on trace les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

- Si (D_1) et (D_2) sont sécantes, alors le système admet une solution unique : le couple de coordonnées du point d'intersection des droites (D_1) et (D_2) ;
- Si (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles, alors le système n'a pas de solution ;
- Si (D_1) et (D_2) sont confondues, alors le système admet une infinité de solutions.

Exercice1 Résous graphiquement le système: $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

Solution : Je résous graphiquement le système: $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$,

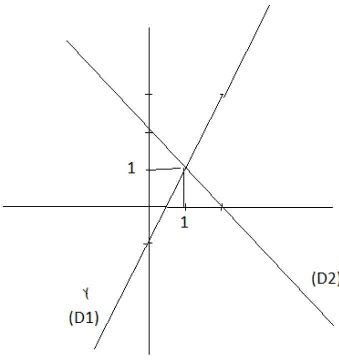
Soit (D_1):$2x - y - 1 = 0$;

x	0	1
y	-1	1

Soit (D_2):$x + y - 2 = 0$

x	0	2
y	2	0

Donc : $S = \{(1\ ; 1\ )\}$



Exercice2 : Résous graphiquement chacun des systèmes: $a) \begin{cases} 2x + 5y - 1 = 0 \\ 4x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$; $b) \begin{cases} 5x - 2y - 9 = 0 \\ 3x + y + 3 = 0 \end{cases}$.

II- UTILISATION DE SYSTEMES D'EQUATIONS : PROBLEMES DU PREMIER DEGRE DANS $\mathbb{R}^2$

Activité : -

Deux nombres ont pour somme 86 et pour différence 38.

-Désigne par x le premier nombre et per y le deuxième nombre

-Ecris l'équation de la somme et celle de la soustraction ;

-Forme le système du premier degré à deux inconnues avec ces équations, puis résous ce système ;

-Fais une vérification des résultats obtenus ;

-Conclus par rapport aux résultats obtenus

Je retiens :

La résolution d'un problème du premier degré dans $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, nécessite les étapes suivantes :

1- Choix des inconnues (correspondant généralement à la question posée) ;
2- Mise en équations du problème posé
3- Résolution du problème posé (résolution du système)
4- Vérification ou preuve des résultats obtenus ;
5- Conclusion (Interprétation du résultat par rapport au problème posé)

Exercice1

Monsieur ITOUS possède 6500F en billets de 500F et de 1000F. Il y a 10 billets en tout.
Combien a-t-il de billets de 500F et de billets de 1000F ?

Solution

- Choix des inconnues : Soient x le nombre de billets de 500F et y celui des billets de 1000F
- Mise en équation : $\begin{cases} 500x + 1000y = 6500 \ (1) \\ x + y = 10 \ (1) \end{cases}$
- Résolution du système : On trouve : $x = 7 et\ y = 3$
- Vérification $\begin{cases} 500 \times 7 + 1000 \times 3 = 6500 \\ 7 + 3 = 10 \end{cases}$ Vrai
- Conclusion : Monsieur ITOUS a 7 billets de 500F et 3 billets de 1000F.

Exercice2 Le périmètre d'un rectangle de longueur x et de largeur y est de 148m. La largeur mesure 1,8m de plus que la largeur.
Calcule la mesure de la longueur et celle de la largeur.

Exercice3 Aujourd'hui Mar a 11ans et Pierre en a 26.
Dans combien d'années l'âge de Pierre sera-t-il le double de celui de Marc ?

Exercice4 Dans un rectangle, le périmètre est égal à 132m. Si l'on augmentait la longueur de 24m et la largeur de 15m, alors l'aire augmenterait de $162m^2$. Trouve les dimensions de ce rectangle.