TITRE DE LA LEÇON : FONCTIONS AFFINES
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Fonction (Activités diverses)
Niveau : Collège - Classe : Troisième

1- Définition

On appelle fonction affine, une fonction qui, à tout nombre réel x, associe le nombre réel $ax + b$ ou $mx + p$.

Si on désigne par f cette fonction, alors on peut noter $f: \mapsto ax + b$ ou $f(x) = ax + b$

Cas particuliers :

Si $b = 0$, alors $f: \mapsto f(x) = ax$ est une fonction linéaire

Si $a = 0$, alors $f: \mapsto f(x) = b$ est une fonction constante

2- Représentation graphique d'une fonction affine

La représentation graphique d'une fonction affine, est une droite (d) (non parallèle à l'axe des ordonnées), d'équation **:** $\boldsymbol{y} = ax + b$ ou $\boldsymbol{y} = mx + p$

a (ou m) : est le coefficient directeur ou pente de la droite (d)

b (ou p) : est l'ordonnée à l'origine de la droite (d)

3- Détermination des coefficients d'une fonction affine

Connaissant les images de deux nombres réels x_1 et x_2 $(x_1 \neq x_2)$ par une fonction affine f, l'égalité suivante permet de déterminer le coefficient a ou m :

$\boldsymbol{m} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ **:** taux d'accroissement (ou taux de variation) de f entre $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$

NB Calculer l'antécédent d'un réel β par f, c'est résoudre l'équation : $f(x) = \beta$

4- Sens de variation :

Soit f une fonction définie par $f(x) = ax + b$

- Si a > 0 alors f est strictement croissante (ou f est croissante) ;
- si a $<$ O ; alors f est strictement décroissante (ou f est décroissante) ;
- si a = 0 ; alors f est constante

❖ **Comparaison des images par une fonction affine**

Soient $\propto$ et β deux nombres réels tels que : $\propto < \beta$

-Si f est croissante, alors $f(\propto) < f(\beta)$

-Si f est décroissante, alors $f(\propto) > f(\beta)$

5- Fonctions affines en escalier

Une fonction affine en escalier, est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles sur chacun desquels f coïncide avec une fonction constante

Exemples :

- **Fonction partie entière :** C'est une fonction qui, à tout nombre réel x, associe le nombre entier relatif $E(x)$;

$E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x.

Une fonction partie entière $f: \mapsto f(x) = E(x)$ est une fonction constante sur chaque intervalle $[n; n+1[$ telle que :

$n \leq x < n+1 \Leftrightarrow E(x) = n$; n : est un nombre entier relatif.

Exemple : Si $f(x) = E(x)$ sur $-3 \leq x < 2$, alors

$$\begin{cases} f(x) = -3 \ si \ -3 \leq x < -2 \\ f(x) = -2 \ si \ -2 \leq x < -1 \\ f(x) = -1 \ si \ -1 \leq x < 0 \\ f(x) = 0 \ si \ 0 \leq x < 1 \\ f(x) = 1 \ si \ 1 \leq x < 2 \\ f(x) = 2 \ si \ 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

6-Fonctions affines par intervalles ou par morceaux

Une fonction affine par intervalles ou par morceaux, est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles sur chacun desquels f coïncide avec une fonction affine

- **Fonction valeur absolue :** Une fonction valeur absolue f , est une fonction affine par intervalles qui, à tout nombre réel x,associe le nombre réel $|ax+b|$

Exemple : $f: \mapsto f(x) = |2x+4| = \begin{cases} 2x+4 \ si \ x \geq -2 \\ -2x-4 \ si \ x \ \leq -2 \end{cases}$.

- **Fonctions mantisses :** Une fonction mantisse f, est une fonction affine par intervalles qui, à tout nombre réel x,associe le nombre réel : $f(x) = E(x) - x$ **ou**
  $f(x) = x - E(x)$; où est la partie entière de x

Exemple : Si $f(x) = x - E(x)$ sur $-3 \leq x < 2$, alors

$$\begin{cases} f(x) = x+3 \ si \ -3 \leq x < -2 \\ f(x) = x+2 \ si \ -2 \leq x < -1 \\ f(x) = x+1 \ si \ -1 \leq x < 0 \\ f(x) = x \ si \ 0 \leq x < 1 \\ f(x) = x-1 \ si \ 1 \leq x < 2 \\ f(x) = x-2 \ si \ 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

Exercice1

On considère la fonction affine f définie par : $f(x) = -2x + 3$

1- Etudie le sens de variation de f
2- Compare les nombres $f\left(\frac{3}{5}\right)$ et $f\left(\frac{5}{3}\right)$ sans les calculer.

Solution1

1-Sens de variation de f

$a = -2 < 0$, alors f est décroissante.

2-Comparaison de $f\left(\frac{3}{5}\right)$ et $f\left(\frac{5}{3}\right)$

$\frac{3}{5} = \frac{3\times3}{5\times3} = \frac{9}{15}$; $\frac{5}{3} = \frac{5\times5}{3\times5} = \frac{25}{15}$;comme 9 <25, alors $\frac{3}{5} < \frac{5}{3}$

De plus f est décroissante, alors $f\left(\frac{3}{5}\right) > f\left(\frac{5}{3}\right)$

Exercice 2

On considère la fonction affine g définie par : $g(x) = -3x + 7$

a-Calcule l'image de par g, puis l'antécédent de 10.

b-Représente graphiquement g .