TITRE DE LA LEÇON : THEOREME DE PYTHAGORE- RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Discipline : Mathématiques

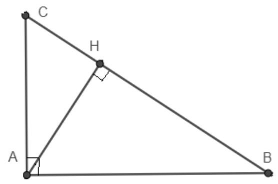
Sous-discipline : Géométrie

Niveau : Collège - Classe : Troisième

Activité : ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6\ cm\,;AC = 8\ cm\ et\ BC = 10\ cm$.
Le point H est le projeté orthogonal de A sur le segment $[BC]$.
On donne : $BH = 6{,}4\ cm\,; HC = 3{,}6\ cm\ et\ AH = 4{,}8\ cm$.

a- Construis la figure
b- Calcule, puis compare : $BC^2\ et\ AC^2 + AB^2$; $AB^2\ et\ BH \times BC$; $AC^2\ et\ HC \times BC$; $AH^2\ et\ BH \times HC$; $AB \times AC\ et\ AH \times BC$

Je retiens :



- **Enoncé du théorème de Pythagore :**

Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés : Si ABC est un triangle rectangle en A, alors : $\boldsymbol{BC^2 = AB^2 + AC^2}$.

Exercice 1 :
MNP est un triangle rectangle en M tel que : $NP = 9\ cm\ \ et\ MN = 7{,}2\ cm$. Calcule MP.

- **Réciproque du théorème de Pythagore :**

Si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle :
Si dans un triangle ABC, $\boldsymbol{AB^2 + AC^2 = BC^2}$, alors ce triangle est rectangle en A.

Exercice 2 :
ABC est un triangle tel que $AB = 4\ cm\,; AC = 2\sqrt{5}\ cm$ et $BC = 2\ cm$.
Démontre que le triangle ABC est rectangle en B.

- **Relations métriques dans un triangle rectangle :**
  - ✓ Le carré de l'un des côtés de l'angle droit, est égal au produit de sa projection sur l'hypoténuse par la longueur de l'hypoténuse : $AB^2 = BH \times BC$; $AC^2 = CH \times CB$.
  - ✓ Le carré de la hauteur, est égal au produit des projections qu'elle détermine sur l'hypoténuse : $AH^2 = HB \times HC$

- ✓ Le produit des côtés de l'angle droit, est égal au produit de la hauteur par l'hypoténuse :
  $AB \times AC = AH \times BC$.

NB : Le théorème de Pythagore et les relations métriques, permettent de calculer les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.
La réciproque du théorème de Pythagore permet de démontrer que le triangle est rectangle.

Exercice 3 :
ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6\ cm$; $AC = 8\ cm$ et $BC = 10\ cm$.
Le point H est le projeté orthogonal de A sur le segment $[BC]$.

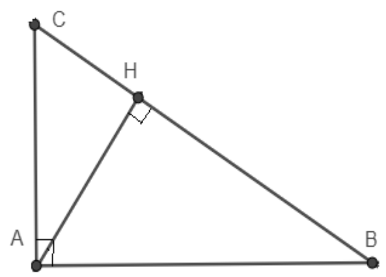
a- Construis la figure.
b- Calcule AH et BH.
c- Montre que $HC = 6{,}4\ cm$.

Exercice 4 :
ABC est un triangle tel que $AB = 3\ cm$; $AC = 4\ cm$ et $BC = 5\ cm$.
Soit H est le projeté orthogonal de A sur le segment $[BC]$ tel que : $HC = 3{,}2\ cm$

a- Construis la figure.
b- Démontre que le triangle ABC est rectangle en A.
c- En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ACH, calcule AH.
d- Calcule BH.

Solution 4 :

a) Je construis la figure.



b) Je démontre que le triangle ABC est rectangle en A.
$BC^2 = 25$; $AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$.
Alors ; $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'où le triangle ABC est rectangle en A.

c) Je calcule : AH. Le triangle ACH étant rectangle en H, alors $AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow$

$AH^2 = AC^2 - HC^2$; $AH^2 = 16 - 10{,}24 = 5{,}76 \Rightarrow AH = \sqrt{5{,}76} \Rightarrow AH = 2{,}4cm$

d) Je calcule BH.

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5} \Rightarrow BH = 1{,}8cm$$

Exercice 5
EFG est un triangle tel que $EF = 13cm$; $EG = 5\ cm$ et $FG = 12\ cm$.
Soit J est le projeté orthogonal de G sur le segment $[EF]$.

a- Réalise la figure.
b- Démontre que le triangle EFG est rectangle en G.
c- Calcule FJ ; JG et EJ.