TITRE DE LA LEÇON : EXPRESSIONS ALGEBRIQUES
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Algèbre
Niveau : Collège - Classe : Troisième

1-Développement d'une expression algébrique

Développer une expression algébrique, c'est la transformer en une somme algébrique, en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$k(a+b) = ka + kb$;
$k(a-b) = ka - kb$;
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

2-Factorisation d'une expression algébrique

Factoriser une expression algébrique, c'est la transformer en un produit de facteurs.

Méthodes de factorisation:

a- Utilisation des identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Exemples :

- ✓ $9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2 = (3x-4)(3x-4)$;
- ✓ $4x^2 - 25 = (2x+5)(2x-5)$;
- ✓ $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

b- Mise en évidence d'un facteur commun

Soit $P(x)$ une expression à factoriser :
-On identifie d'abord le nombre de termes de $P(x)$;
-on vérifie si $P(x)$ est une identité remarquable ;
-Sinon, on identifie un facteur commun (s'il n'y a pas d'ambiguïté) :

$$ka + kb = k(a+b)\ ;\ ka - kb = k(a-b).$$

NB Si le facteur commun n'est pas visible, on vérifie si chaque terme de $P(x)$ est une identité remarquable ou a une expression à mettre en facteur.

Exemples :

a) $T(x) = (x+1)(x+5) + (x+1)(2x-3) = (x+1)[(x+5) + (2x-3)]$

$$T(x) = (x+1)(3x+2).$$

b) $P(x) = x^3 + 8 - (x+2)(x^2 - 3x - 2)$

$= (x+2)(x^2 - 2x + 4) - (x+2)(x^2 - 3x - 2) = (x+2)[(x^2 - 2x + 4) - (x^2 - 3x - 2)]$

$$P(x) = (x+2)(x+6)$$

c-Méthode par décomposition

Cette méthode s'applique généralement si le polynôme du second degré :
$ax^2 + bx + c$; $(a \neq 0)$ *n'est pas une identité remarquable.*
Dans ce cas, on décompose additivement le terme bx en fonction des termes: ax^2 et c de façon à avoir un facteur commun.
Exemple Factorisation de : $P(x) = 2x^2 + x - 6$

$$P(x) = 2x^2 + x - 6 = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x(x+2) - 3(x+2).$$

Donc: $P(x) = (x+2)(2x-3)$

d-Division euclidienne

Cette méthode s'applique généralement si le polynôme du second degré
$ax^2 + bx + c$ *(*$a \neq 0$*) n'est pas une identité remarquable.*

Dans ce cas, on cherche une racine x_0 *du polynôme :* $ax^2 + bx + c$*, puis on divise*
$ax^2 + bx + c$ *par :* $x - x_0$ *et on obtient un quotient* $q(x)$ *et un reste nul :*
$ax^2 + bx + c = (x - x_0).q(x)$ *).*

Exemple Factorisation de : $P(x) = 2x^2 + x - 6$

$P(-2) = 2(-2)^2 + (-2) - 6\,; \Rightarrow\ P(-2) = 0$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + x - 6 & x+2 \\ \hline 0 & 2x-3 \end{array}$$

Donc $P(x) = (x+2)(2x-3)$.

3-Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle, est le quotient de deux polynômes :$\frac{f(x)}{g(x)}$

$f(x)$ *et* $g(x)$ *sont des polynômes ;* $g(x) \neq 0$*.*

Une fonction $h : x \mapsto h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *est appelée : fonction rationnelle*

Les fonctions rationnelles de la forme : $\frac{ax+b}{cx+d}$ *sont appelées fonctions homographiques.*

L'ensemble de définition d'une fonction rationnelle :
$h : x \mapsto h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$*, est l'ensemble des réels pour lesquels* $h(x)$ *existe :* $g(x) \neq 0$

Règle *: Pour simplifier une fraction rationnelle* $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *:*

- *On détermine d'abord l'ensemble de définition de la fonction rationnelle associée, noté :* D_h*;*
- *on factorise (si possible) le numérateur et le dénominateur de* $h(x)$*;*
- *on élimine le ou les facteur(s) commun(s) visibles dans les deux termes de la fraction rationnelle* $h(x)$*.*

Exemple : Simplification de $h(x) = \frac{(x+2)(2x-3)}{(x-1)(x+2)}$

Ensemble de définition de h : *h est définie (ou h(x) existe) si, et seulement si :*

$$(x-1)(x+2) \neq 0$$

Posons : $(x-1)(x+2) = 0$*, on a* $x = 1$ *ou* $x = -2$

$D_h = \mathbb{R} - \{-2; 1\}$ *ou* $D_h = \mathbb{R} - \{1; -2\}$ *ou* $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$*ou* $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1; -2\}$

Donc $h(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

Exercice 1 :

Développe et réduis chacune des expressions algébriques, suivant l'ordre des puissances décroissantes de x*:*

$A = (2x-5)(5x-1) - (2x+3)(2x-4)$ *;*

$B = x(2x+7)(3x+8) + 3x^2(-2x-7) + 2x^2 + 7 - (2x-4)^2$ *;*

$C = (2x-1)[(x-1)^2 - 4]$ *;*

$D = (x^2 - 6x + 9)[(x^2-1)(2x+1)]$.

Exercice 2 :

Factorise chacune des expressions algébriques suivantes :

$T = 4(x+2)^2 - 36x^2$ *;*

$E = 4x^2 - 9 + (x+1)(2x-3)$ *;*

$F = (2x-3)(x+2)^2 - 16(2x-3)$;

$G = 4x(1-x) + (x-1)^2$;

$H = (15-9x)(2x-3) - 7(3x-5)(1-x) - 9x^2 + 25$;

$P = (x-3)(3x-5) + (x^2-6x+9) - (4-2x)(x+1)$;

Exercice 3 :

Détermine l'ensemble de définition de f, puis simplifie l'expression f(x) dans chaque cas suivants :

a) $f(x) = \frac{x^3+5x^2}{x^2-x}$ *; b)* $f(x) = \frac{4x^2-20x+25}{2x^2-5x}$