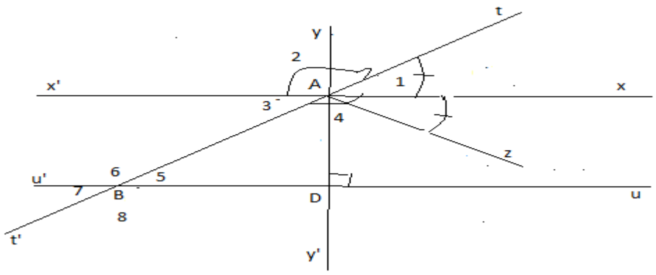
TITRE DE LA LEÇON : OBJETS GEOMETRIQUES DU PLAN : Angles et cercles
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Géométrie
Niveau : Collège - Classe : Troisième

I- Angles adjacents, angles dans la configuration des droites parallèles coupées par une sécante.

Activité : Observe la figure ci-dessous



Les droites : $(x'x)$et $(u'u)$ sont parallèles ; $(y'y)$ est perpendiculaire aux droites $(x'x)$et $(u'u)$; $(t't)$ est la droite sécante à $(x'x)$ et à $(u'u)$.

1- Identifie les angles : $\widehat{xAy}$;$\widehat{xAx'}$; $\widehat{xAt}$ et $\widehat{tAy}$;$\widehat{xAt}$ et $\widehat{tAx'}$;$\widehat{zAt}$ et $\widehat{tAy}$.

a- 2-Identifie la bissectrice de l' angle : $\widehat{zAt}$

3-Identifie les angles suivants, puis conclus à propos de leurs mesures :

- *a- $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_7}$; $\widehat{A_2}$ et $\widehat{B_8}$*
- *b- $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_5}$; $\widehat{A_4}$ et $\widehat{B_6}$*
- *c- $\widehat{A_1}$ et $\widehat{A_3}$; $\widehat{A_2}$ et $\widehat{A_4}$; $\widehat{B_5}$ et $\widehat{B_7}$; $\widehat{B_6}$ et $\widehat{B_8}$*
- *d- $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_5}$; $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_7}$; $\widehat{A_2}$ et $\widehat{B_6}$; $\widehat{A_4}$ et $\widehat{B_8}$;*

Je retiens :

1- Angles adjacents : Angles complémentaires, angles supplémentaires

— *Un angle, est une portion du plan délimitée par deux demi-droites de même origine.*

Exemple : L'angle : $\widehat{zAt}$ de sommet A et de côtés :$[Az)$ et $[At)$.

— *Deux angles sont adjacents, s'ils ont un côté commun et un même sommet (et situés de part et d'autre de ce côté commun).*

Exemple : Les angles $\widehat{zAt}$ et $\widehat{tAy}$ sont adjacents.

— *Deux angles sont complémentaires, si la somme de leur mesure, est égale à 90°.*

Exemple : Les angles $\widehat{xAt}$ et $\widehat{tAy}$ sont complémentaires, car $mes\widehat{xAt} + mes\ \widehat{tAy} = 90°$.

— *Deux angles sont supplémentaires, si la somme de leur mesure, est égale à 180°.*

Exemple : Les angles $\widehat{xAt}$ et $\widehat{tAx'}$ sont supplémentaires, car $mes\widehat{xAt} + mes\ \widehat{tAx'} = 180°$

— *Une bissectrice d'un angle, est une droite (ou demi-droite) qui passe par le sommet de l'angle et qui partage cet angle en deux angles de même mesure.*

Exemple : $[Ax)$ ou (Ax) est la bissectrice (ou bissectrice intérieure) de l'angle $\widehat{tAz}$.

On a : $mes\widehat{zAx} = mes\ \widehat{xAt} = \frac{1}{2} mes\widehat{zAt}$.

***NB**: $[Ay)$ ou (Ay) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{tAz}$ (qui est toujours perpendiculaire à la bissectrice intérieure).*

— *Si un point M appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant (situé à égal distance) des supports des côtés de cet angle : Exemple :* $M \in [Ax)$*, alors* $MH = MK$

NB : *Quand il s'agira de la bissectrice intérieure, on parlera tout simplement de: bissectrice.*

2- *Angles dans la configuration des droites parallèles coupées par une sécante (comparaison des angles).*

a- *Angles alternes-externes*

Deux angles alternes-externes, sont les angles qui sont situés de part et d'autre de la sécante, mais à l'extérieure de la bande formée par les deux droites parallèles (ou non) coupées par une sécante.

Exemple : $\widehat{A_1}$ *et* $\widehat{B_7}$ *;* $\widehat{A_2}$ *et* $\widehat{B_8}$ *sont alternes-externes.*

b- *Angles alternes-internes*

Deux angles alternes-internes, sont les angles qui sont situés de part et d'autre de la sécante, mais à l'intérieure de la bande formée par les deux à droites parallèles (ou non), coupées par une sécante.

Exemple : $\widehat{A_3}$ *et* $\widehat{B_5}$ *;* $\widehat{A_4}$ *et* $\widehat{B_6}$ *sont alternes-internes.*

c- *Angles correspondants*

Deux angles correspondants sont les angles qui sont situés d'un même côté de la sécante, à l'extérieure et à l'intérieure des droites parallèles (ou non) coupées par une sécante.

Exemple : $\widehat{A_1}$ *et* $\widehat{B_5}$ *;* $\widehat{A_3}$ *et* $\widehat{B_7}$ *;* $\widehat{A_2}$ *et* $\widehat{B_6}$ *;* $\widehat{A_4}$ *et* $\widehat{B_8}$ *sont correspondants.*

d- *Angles opposés par un sommet*

Deux angles opposés par un sommet, sont les angles qui ont un même sommet et situés de part et d'autre de ce sommet c'est-à-dire, les côtés de l'un sont dans le prolongement des côtés de l'autre).

Exemple : $\widehat{A_1}$ *et* $\widehat{A_3}$ *;* $\widehat{A_2}$ *et* $\widehat{A_4}$ *sont opposés par le sommet A.*

$\widehat{B_5}$ *et* $\widehat{B_7}$ *;* $\widehat{B_6}$ *et* $\widehat{B_8}$ *sont opposés par le sommet B.*

e- *Propriétés :*

- ✓ *Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-externes, les angles alternes-internes, les angles correspondants ont la même mesure ;*
- ✓ *Si deux droites coupées par une sécante, déterminent deux angles alternes-externes, deux angles alternes-internes, deux angles correspondants de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.*
- ✓ *Si deux droites non parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-externes, les angles alternes-internes, les angles correspondants, n'ont pas la même mesure.*
- ✓ *Deux angles opposés par un sommet, ont la même mesure.*

Exemple : $(x'x)$*et* $(u'u)$ *sont parallèles , alors :* $mes\widehat{A_1} = mes\widehat{B_7}$; $mes\widehat{A_2} = mes\widehat{B_8}$;

$mes\widehat{A_3} = mes\widehat{B_5}$; $mes\widehat{A_4} = mes\widehat{B_6}$.

Angles opposés par le sommet: $mes\widehat{A_1} = mes\widehat{A_3}$; $mes\widehat{A_2} = mes\widehat{A_4}$; $mes\widehat{B_5} = mes\widehat{B_7}$; $mes\widehat{B_6} = mes\widehat{B_8}$.

II-Angles liés à un cercle (comparaison des angles)

Activité :

(C) est un cercle de centre O et de rayon de longueur 3cm. Soit A, B et C, trois points distincts de (C) tels que : $mes\ (\widehat{BAC}) = 60°$

1-Construis la figure

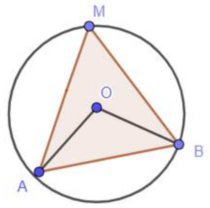
2-Sachant que les angles $(\widehat{BAC})$ *et* $(\widehat{BOC})$ *interceptent le même arc de cercle, compare, en utilisant le rapporteur,* $mes\ (\widehat{BAC})$ *et* $mes\ (\widehat{BOC})$*, puis conclus.*

3-Place un point D sur (C) de telle sorte que les points A, B, C et D pris dans cet ordre, soit distincts.

4-Sachant que les angles $(\widehat{ABD})$ *et* $(\widehat{ACD})$ *interceptent le même arc de cercle, compare, en utilisant le rapporteur,* $mes\ (\widehat{ABD})$ *et* $mes\ (\widehat{ACD})$*, puis conclus.*

Je retiens :

1- Angles inscrits et au centre interceptant le même arc



a- Définitions :

-Un angle inscrit, est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle.

-Un angle au centre, est un angle dont le sommet est sur le centre du cercle et dont les côtés sont les rayons du cercle.

-Un arc intercepté, est un arc qui ne contient pas le sommet de l'angle.

b- Propriété:

Dans un cercle, la mesure de l'angle inscrit, est égale à la moitié de celle de l'angle au centre, lorsque ces deux angles interceptent le même arc de cercle.

Exemples *:* $(\widehat{AMB})$ *est l'angle inscrit et* $(\widehat{AOB})$ *est l'angle au centre. Ils interceptent le même arc :* $\widetilde{AB}$*. Donc :* $mes\ (\widehat{AMB}) = \frac{1}{2} mes\ (\widehat{AOB})$*.*

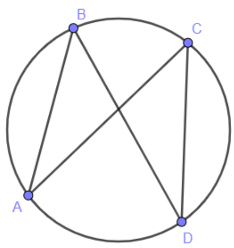
Remarque :

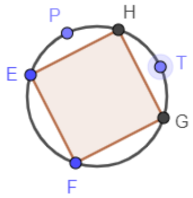
-*Deux angles sont égaux si, et seulement s'ils ont la même mesure.*

-La longueur d'un arc de cercle (par exemple $\widetilde{AB}$*) est :* $L_{\widetilde{AB}} = R \times \alpha$ *;* $\alpha = mes(\widehat{AOB})$ *en radians ou bien* $L_{\widetilde{AB}} = \frac{R\pi\alpha}{180}$*;* $\alpha = mes(\widehat{AOB})$ *en degrés. R : rayon du cercle.*

-L'aire d'un secteur angulaire (par exemple ; secteur OBC) est : $S = \frac{1}{2}R^2 \times \alpha$ *;* $\alpha = mes(\widehat{AOB})$ *en radians.*

2-Angles inscrits interceptant le même arc et ceux interceptant les arcs de même longueur





- *Dans un cercle,*

- ✓ *les angles inscrits qui interceptent le même arc de cercle, ont la même mesure : Les angles* $(\widehat{ABD})$ *et* $(\widehat{ACD})$ *interceptent le même arc de cercle* $\overset{\frown}{AD}$*, alors :*

$mes(\widehat{ABD}) = mes\ (\widehat{ACD})$;

- ✓ *les angles inscrits qui interceptent deux arcs de cercle de même longueur, ont la même mesure : Les arcs* $\overset{\frown}{PE}$ *et* $\overset{\frown}{TG}$ *ont la même longueur, alors les angles inscrits :* $(\widehat{EHP})$ *et* $(\widehat{THG})$ *sont égaux, c'est-à-dire :* $mes(\widehat{EHP}) = mes\ (\widehat{THG})$ *;*
- ✓ *deux angles inscrits interceptant deux arcs opposés, sont supplémentaires : Les angles inscrits* $(\widehat{EHG})$ *et* $(\widehat{EFG})$ *interceptent les arcs opposés, alors ils ont supplémentaires :* $mes(\widehat{EHG}) + mes\ (\widehat{EFG}) = 180°$ *;*
- ✓ *si un angle inscrit intercepte un demi-cercle, alors cet angle est droit* $(\widehat{HPF})$ *est inscrit dans (C) et* $[HF]$ *diamètre de (C), alors :* $mes\ (\widehat{HPF}) = 90°$.

- *La bissectrice d'un angle inscrit, partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur ;*
- *Les cordes qui sous-tendent des arcs égaux, sont égales : les arcs* $\overset{\frown}{EF}$ *et* $\overset{\frown}{FG}$ *sont égaux, alors les cordes* $[EF]$ *et* $[FG]$ *ont la même longueur.*

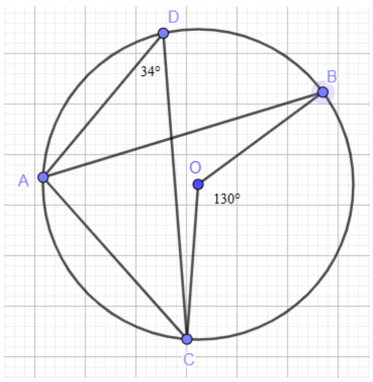
Exercice 1 :

On considère un quadrilatère convexe ABCD inscrit dans un cercle(C) de centre O de rayon 5cm tel que : $mes(\widehat{DCA}) = 30°$ *et* $mes(\widehat{CAB}) = 45°$

1. *Déterminer les mesures des angles :* $\widehat{DOA}$ *et* $\widehat{BOC}$.
2. *Déterminer les longueurs des arcs de cercle :* $\overset{\frown}{DA}$ *et* $\overset{\frown}{CB}$.

Exercice 2 :

Sur la figure ci-dessous, A, B, C et D sont les points du cercle de centre O tels que : $mes(\widehat{ADC}) = 34°$ *et* $mes(\widehat{BOC}) = 130°$*. Calcule la mesure de chacun des angles du triangle ABC. (On ne reproduit pas la figure).*



Exercice 3 :

On considère un quadrilatère ABCD dont les sommets sont sur un même cercle C (O, R) et tels que :$\widehat{DAB} = 105°$ *et* $\widehat{ABC} = 85°$*. Détermine les mesures des autres angles de ce quadrilatère.*

Exercice 4 :

ABCD est un parallélogramme tel que : $mes\widehat{CDA} = 60°$*. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.*

1. Faire une figure.

2. Comparer les angles $\widehat{CBA}$ *et* $\widehat{CDA}$*. Justifier.*

3. En déduire que $mes\widehat{COA} = 2mes\widehat{CDA}$*. Calculer* $mes\widehat{AOC}$ *et* $mes\widehat{BAD}$.