TITRE DE LA LEÇON : EQUATIONS CARTESIENNES D'UNE DROITE
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Géométrie
Niveau : Collège - Classe : Troisième

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I- Notion d'équation cartésienne d'une droite

1- Définitions :

— *On appelle équation cartésienne d'une droite (D), toute équation de la forme (forme générale) :* $\boldsymbol{ax+by+c=0}$*, où a et b ne sont pas simultanément nuls :* $(a;b)\neq(0;0)$ *;* $\vec{\boldsymbol{v}}\binom{-b}{a}$ *est le vecteur directeur de la droite (D) et* $\vec{\boldsymbol{u}}\binom{a}{b}$ *son vecteur normal.*

— *L'équation (D) peut se mettre sous la forme explicite :* $\boldsymbol{y=mx+p}$ ***ou*** $\boldsymbol{y=ax+b}$ *appelée : équation réduite de (D). Avec* $\vec{\boldsymbol{v}}\binom{1}{m}$ *ou* $\vec{\boldsymbol{v}}\binom{1}{a}$ ***:*** *Vecteur directeur de (D) ;*
m *ou* a*: Coefficient directeur ou pente de (D) et p ou b : est l'ordonnée à l'origine.*

Exemples : (D) *:* $3x-2y+5=0$ *(Forme générale) .On a :* $-2y=-3x-5 \Leftrightarrow 2y=3x+5$ $\Leftrightarrow y=\frac{3x+5}{2}$*. On obtient la forme réduite de (D) :* $\boldsymbol{y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}$

Le vecteur directeur de (D) est $\vec{v}\binom{2}{3}$ *ou bien* $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3/2\end{pmatrix}$

2- Remarque :

✓ *Le vecteur directeur et le vecteur normal d'une même droite, sont toujours orthogonaux.*

✓ *Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs.*

✓ *Un point* $A(x_0;y_0)$ *appartient à la droite (D), si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite :*$A(x_0;y_0)\in(D)\Leftrightarrow ax_0+by_0+c=0$ *ou* $y_0=mx_0+p$.

✓ *Si* $\vec{\boldsymbol{v}}\binom{-b}{a}$ *est un vecteur directeur d'une droite (D), alors le coefficient directeur de cette droite est :* $\boldsymbol{m=-\frac{a}{b}}$.

II- Positions relatives de deux droites :

Activité :
Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, on considère les droites* (D_1) *et* (D_2) *d'équations respectives :* $y=2x+3$ *et* $y=2x-2$*, puis la droite* (Δ) *d'équation* $y=-\frac{1}{2}x+1$

1-Place les points $A(0;3)$ *;* $B(-1;1)$ *;* $C(0;-2)$*;* $D(1;0)$ *;* $E(0;1)$ *;* $F(2;0)$ *dans ce repère.*
2-Trace la droite (D_1) *passant par A et B, puis la droite* (D_2) *passant par C et D .*
3-Trace la droite (Δ) *passant par E et F.*
4-Identifie la position relative des droites (D_1) *et* (D_2) *;* (Δ) *et* (D_2)
5-Donne les coefficients directeurs a et a' des droites (D_1) *et* (D_2) *, puis compare les.*
6-Donne les coefficients directeurs m et m' des droites (Δ) *et* (D_2)*, puis calcule* $m\times m'$.

Je retiens :

Soient (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs $\vec{\boldsymbol{v}}$ *et* $\vec{\boldsymbol{v}}'$ *, de coefficients directeurs* $\boldsymbol{m}$ *et* $\boldsymbol{m'}$

— *(D) //(D')* $\Leftrightarrow$ $\vec{\boldsymbol{v}}$ *et* $\vec{\boldsymbol{v}}'$ *sont colinéaires ou bien:* $\boldsymbol{m=m'}$ ***; (ou*** $\boldsymbol{a=a'}$*);*

— *(D)* $\perp (D') \Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{v'}\Leftrightarrow \vec{v}.\vec{v'}=0$ *ou bien :* $\boldsymbol{m\,.\,m'=-1}$ ***;*** $(\boldsymbol{ou\ a\,.\,a'=-1})$ ***;***

— *(D) et (D') sont sécantes*$\Leftrightarrow$: $\boldsymbol{m \neq m'}$; $\boldsymbol{(a \neq a')}$.

Remarque :

Soient deux droites (D) et (D') d'équations respectives : $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ *et* $\boldsymbol{a'x + b'y + c' = 0}$

- ✓ *(D) et (D') sont strictement parallèles*$\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
- ✓ *(D) et (D') sont confondues* $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

III- ***Détermination des équations cartésiennes de droites***

Activité :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *. On donne les points* $A(3\,;\,4)$, $B(-2\,;\,2)$ *et le vecteur* $\vec{V}\binom{-3}{2}$*.On se propose de déterminer une équation cartésienne de la droite* (D_1)*passant par A et B ; de la droite* (D_2) *passant par A et de vecteur directeur* $\vec{V}$ *; de la droite* (D_3) *passant par A et de coefficient directeur* $a = 6$.

1- *a) Remplace les coordonnées des points A et B dans la relation* $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ *;*

b) Applique la propriété fondamentale de la proportion : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$ *;*

c) Ecris l'équation de la droite (D_1) *;*

2- *a) Remplace les coordonnées de A et de* $\vec{V}$ *dans l'égalité suivante :* $\frac{x-x_A}{x_{\vec{v}}} = \frac{y-y_A}{y_{\vec{v}}}$ *;*

b) Applique la propriété fondamentale de la proportion ci-dessus ;

c) Ecris l'équation de la droite (D_2) *:*

d) Remplace les coordonnées de A et la valeur de a dans la formule suivante :

$a(x - x_A) = y - y_A$ *;*

a) *Ecris l'équation de la droite*(D_3).

Je retiens : *Dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

- ***L'équation d'une droite définie par deux points (ou passant par deux points)*** $A(x_A;\ y_B)$ *et* $B(x_B;\ y_B)$ *est donnée par la relation:* $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$
- ***L'équation d'une droite définie par un point*** *A*$(x_A;\ y_A)$ *et un vecteur directeur* $\vec{V}(a; b)$ *est donnée par la relation :* $\boldsymbol{\frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b}}$
- ***L'équation d'une droite passant par un point*** *A*$(x_A;\ y_A)$ ***et de coefficient directeur a*** *est donnée par la relation:* $\boldsymbol{a(x - x_A) = y - y_A}$

Exercice 1 :

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$*, on donne les points*$E(4\,;\,2)$*et* $F(-3\,;\,-2)$.
Ecris une équation de la droite (D) passant par E et F.

Exercice 2 :

Dans un plan muni d'un repère orthonormé$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$*, on donne le point B(1 ; 5) et le vecteur* $\vec{V}\binom{2}{5}$
Ecris une équation cartésienne de la droite (D) passant par B et de vecteur directeur $\vec{V}$.

Exercice 3 :

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$*, on donne le point A(3 ; 1).*
Ecris une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de coefficient directeur 4.

Exercice 4 :

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}$ *,*$\vec{\jmath}$ *), on donne la droite* (Δ) *:* $2x - 3y - 2 = 0$

a) *Trouve une équation de la droite*(D_1) *passant par* $G\ (\frac{1}{2}\,;\,-2)$ *et parallèle à* (Δ).

b) *Trouve une équation de la droite* (D_2) *passant par* $H\left(3\,;\,4\right)$ *et perpendiculaire à* (Δ).

Exercice 5 :

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, on donne les points :*
$A\,(1\,;2), B\,(3\,;-2), C\,(1\,;2), D(3\,;1)$ *et* $E(-1\,;-1)$.

1- *Place ces points dans le repère et justifie que les points C, D et E ne sont pas alignés.*
2- *Ecris l'équation de médiatrice du segment*$[AB]$.
3- *a) Détermine les équations cartésiennes des hauteurs issues B et c dans le triangle ABC.*
   b) En déduis les coordonnées du point H, orthocentre du triangle ABC.
4- *Ecris l'équation de la médiane du triangle ABC, passant par C.*

Calcule les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC