TITRE DE LA LEÇON : INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$
Discipline : Mathématiques-
Sous-discipline : Algèbre
Niveau : Collège - Classe : Troisième

I-Inéquations a une inconnue dans $\mathbb{R}$ du type : $|ax + b| < c$

Activité :

On se propose de résoudre l'inéquation :$|x - 5| < 3$

- *Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x - 5 < 3$ et l'inéquation $x - 5 > -3$*
- *Représente sur une droite graduée, les deux intervalles représentant les ensembles de solutions des inéquations $x - 5 < 3$ et $x - 5 > -3$, en hachurant les parties qui ne sont pas solutions de ces deux inéquations.*
- *Ecris l'intervalle de solutions non hachuré sur la droite graduée.*

Je retiens :

Les inéquations du premier degré à une inconnue, sont les inéquations de la forme :
$ax + b > 0$ *ou* $ax + b \geq 0$ *ou* $ax + b < 0$ *ou* $ax + b \leq 0$ *où **a et b** sont des nombre réels ; a$\neq 0$.*
Pour résoudre une inéquation de type : $|ax + b| < c$; (c: réel positif) :
-On résout successivement les inéquations $\boldsymbol{ax + b < c}$ et $\boldsymbol{ax + b > -c}$, en représentant sur une droite graduée, les deux intervalles qui représentent les ensembles de solutions des inéquations: $\boldsymbol{ax + b < c}$ et $\boldsymbol{ax + b > -c}$, en hachurant les parties qui ne sont pas solutions de ces deux inéquations.
-On donne l'ensemble de solutions de l'inéquation : $|ax + b| < c$, qui est l'intersection des ensembles de solutions des inéquations citées ci-dessus
***NB :** On peut aussi procéder comme suit :*
$|ax + b| < c \Leftrightarrow -c < ax + b < c$ *et on trouve un encadrement de x.*

II-Inéquations se ramenant à une inéquation du premier degré à une inconnue

1-Inéquations produit

Activité :

On se propose de résoudre l'inéquation : $(2x - 5)(2x + 5) > 0$

- *Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $(2x - 5)(2x + 5) = 0$*
- *Dresse dans le même tableau les signes des binômes : $2x - 5$ et $2x + 5$, puis du produit $(2x - 5)(2x + 5)$;*
- *Hachure, dans le tableau dressé, le signe négatif du produit $(2x - 5)(2x + 5)$.*

***Je retiens :** Pour résoudre une inéquation produit (par exemple $(ax + b)(cx + d) > 0$),*

- on résout son équation associée: $(ax + b)(cx + d) = 0$;
- on étudie les signes de: ax +b, $cx + d$ et $(ax + b)(cx + d)$, en dressant un même tableau de signes
- on hachure le signe du produit $(ax + b)(cx + d)$ qui ne convient pas à l'inégalité proposée ;
- on donne l'ensemble de solutions correspondant aux intervalles dont le signe du produit (ax +b)$(cx + d)$ n'est pas hachuré.

2-Inéquations rationnelles

Activité : On se propose de résoudre l'équation : $\frac{x-1}{x+3} \leq \mathbf{0}$

- *Résous dans IR l'équation :* $x + 3 = 0$
- *Détermine l'ensemble de définition de :* $\frac{x-1}{x+3}$;
- *Résous dans IR l'équation :* $x - 1 = 0$
- *Etudie le signe de* $x-1$ *, de* $x + 3$ *et celui de* $\frac{x-1}{x+3}$ *dans le même tableau ;*
- *hachure les signes de* $\frac{x-1}{x+3}$ *dans les intervalles qui ne vérifient pas l'inégalité,*
- *donne l'ensemble de solutions (sous forme d'intervalles).*

Je retiens :

Pour résoudre une inéquation rationnelle de la forme (ou du type) : $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$ $(ou \leq 0)$*, on :*

-détermine d'abord l'ensemble de définition de la fraction rationnelle associée $\frac{ax+b}{cx+d}$;

-résout son équation associée : $\frac{ax+b}{cx+d} = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0$ *;*

- étudie le signe de ax*+b, de* cx*+* d *et celui de* $\frac{ax+b}{cx+d}$ *dans le même tableau ;*

-hachure les signes de $\frac{ax+b}{cx+d}$ *dans les intervalles qui ne vérifient pas l'inégalité,*

- donne l'ensemble de solutions qui sera un intervalle ne contenant pas les valeurs du dénominateur et dont le signe correspond au signe de l'inéquation proposée.

III-Inéquations avec valeur absolue :

-Pour résoudre une inéquation du type : $|\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}| \geq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} > \mathbf{0}$, *on peut écrire :*

$ax + b \geq c$ *ou* $ax + b \leq -c$*, puis résoudre les inéquations :* $ax + b \geq c$ *et* $ax + b \leq -c$.

L'ensemble de solutions est la réunion des ensembles de solutions trouvés.

-Pour résoudre une inéquation du type : $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|$**;** $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \geq |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|$ **;**

$|f(x)| \leq g(x)$; $g(x) \geq 0$; $|f(x)| \geq g(x)$; $g(x) \geq 0$*, on peut élever les deux membres au carré et on résout ensuite l'inéquation :*$(f(x))^2 - (g(x))^2 \leq 0$ *ou* $(f(x))^2 - (g(x))^2 \geq 0$.

IV-Inéquations irrationnelles : $\sqrt{\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}} \leq \boldsymbol{c}$; $\sqrt{\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}} \geq \boldsymbol{c}$ **;** $c \geq o$

Pour résoudre des telles inéquations, il faut d'abord donner leur ensemble de définition (en posant : $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$*), puis ensuite élever les deux membres au carré et enfin résoudre l'inéquation obtenue. L'ensemble de solutions sera l'intersection entre l'ensemble de définition et l'intervalle obtenu.*

NB : *Pour résoudre un système d'inéquations, par exemple:* $\begin{cases} ax + b > cx + d & (1) \\ a'x + b' \geq c'x + d' & (2) \end{cases}$ *, on résout d'une manière séparée, les inéquations (1) et (2). L'ensemble de solutions, est l'intersection des ensembles de solutions des inéquations (1) et (2).*

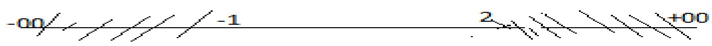
Exercice 1 :

Résous dans $\mathbb{R}$*, l'inéquation :* $|2x - 1| < 3$.

Solution : Je résous dans $\mathbb{R}$*, l'inéquation :* $|2x - 1| < 3$

Procédé1 :

$|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow 2x - 1 < 3$ *et* $2x - 1 > -3 \Leftrightarrow 2x < 4$ *et* $2x > -2 \Leftrightarrow x < 2$ *et* $x > -1$



Donc $S =]-1; 2[$

Procédé2 : $|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$ *. Donc* $S =]-1; 2[$

Exercice2 :*Résous dans* $\mathbb{R}$*, l'inéquation :* $(x - 3)(x + 1) > 0$.

Solution *: Je résous dans* $\mathbb{R}$*, l'inéquation :* $(x - 3)(x + 1) > 0$

Posons :$(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ *ou* $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ *ou* $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x-3		$-$	0	$+$		$+$	
x+1		$-$		$-$	0	$+$	
(x-3)(x+1)		$+$		$-$		$+$	

Donc $S =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$*, l’inéquation :* $\frac{x+9}{x-3} \geq 0$.

Solution : $\frac{x+9}{x-3}$ *est définie* $\Leftrightarrow x - 3 \neq 0$. *Posons* $x - 3 = 0 \Leftrightarrow$ $x = 3$. *Alors :* $D = \mathbb{R} - \{3\}$.

Posons $\frac{x+9}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -9$

x	$-\infty$		-9		3		$+\infty$
$x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+9}{x-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$S =]-\infty; -9] \cup]3; +\infty[$

Exercice 4 :

Résous dans $\mathbb{R}$ *chacune des inéquations :* $|2x - 1| < 3$ *et* $|2x - 1| \geq |x + 4|$

Solution :

- ✓ $|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 - 9 < 0$
  $\Leftrightarrow (2x - 4)(2x + 2) < 0.$

Posons : $(2x - 4)(2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ *ou* $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-4)(2x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-1; 2[$

- ✓ $|2x - 1| \geq |x + 4| \Leftrightarrow (2x - 1)^2 - (x + 4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
  $(x - 5)(3x + 3) \geq 0.$

Posons : $(x - 5)(3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ *ou* $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$3x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-5)(3x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty; -1] \cup [5; +\infty[$

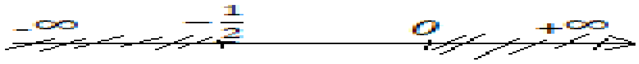
Exercice 5 :

Résous dans $\mathbb{R}$ *chacune des équations :* $\sqrt{\mathbf{2x+1}} < 1$ *et* $\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}} > 3$

Solution *:* $\sqrt{\mathbf{2x+1}} < 1$*. Cette inéquation est définie* $\Leftrightarrow 2x+1 \geq o \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

On a $D = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

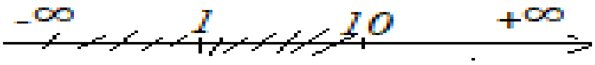
Par suite, $\sqrt{\mathbf{2x+1}} < 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\mathbf{2x+1}}\right)^2 < 1^2 \Leftrightarrow 2x+1 < 1 \Leftrightarrow x < 0. \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[$



$$S = \left[-\frac{1}{2}; 0\right[$$

$\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}} > 3$ *. Cette équation est définie*$\Leftrightarrow x-1 \geq o \Leftrightarrow x > 1$***;*** $D = [1; +\infty[$

Par suite, $\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}} > 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}\right)^2 > 3^2 \Leftrightarrow x > 10 \Leftrightarrow x \in]10; +\infty[$



$S =]10; +\infty[$.

Exercice 6 :

Résous dans $\mathbb{R}$*, chacune des inéquations suivantes:*

$|4x-2| < 6$ *;* $|2x+3| \leq 5$ *;*

$3(2x-5) > 5(2-3x)$ *;*

$2(x+4) + 1 - 5x \leq 3(1-x) + 7$ *;*

$\frac{1}{3}(x+2) - \frac{3}{4}(x-2) < \frac{1}{12}(-5x+2) + 2$ *;* $\frac{x+3}{2} - \frac{4x-3}{3} - 1 \geq -\frac{5x-12}{6}$

$2(5x-7) - 4 < (5x+6) + 5(1+x) + 9$*;*

$5(4x-2) - 7 \leq -13 - 4(1-5x)$.

Exercice 7 :

Résous dans IR chacun des systèmes d'inéquations suivantes :

$a)\begin{cases} 4x-1 > x+2 \\ 3-5x \geq 1-3x \end{cases}; b)\begin{cases} 3x-1 \leq x+3 \\ x-\frac{3}{2} < 2(x-1) \end{cases} ; c)\begin{cases} 3x+3 \leq 2x+1 \\ 4x-3 > 3x-2 \end{cases}$