TITRE DE LA LEÇON : LOGARITHME EN BASE DIX

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Niveau : Collège - Classe : Troisième

1-Notion de logarithme en base 10

On appelle logarithme décimal (ou logarithme en base dix ou logarithme de base dix) d'un nombre réel strictement positif x *, le nombre réel noté :* $log\, x$.

Si $x = 10^n$*, alors* $log\, x$ *est l'exposant qu'il faut élever la base 10 (ou donner à 10) pour obtenir le nombre* x : $log\, x = n$ *où* n *est un nombre entier.*

$$\boldsymbol{log\, x = n \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^n} .$$

Exemples : $log\, 10^{-7} = -7$; $log\, 10 = 1$; $log\, 1 = 0$

Remarque *: Si le nombre réel* $\boldsymbol{x}$ *ne peut pas s'écrire sous la forme :* $x = 10^n$*, alors* $log\, x$ *peut s'écrire sous la forme d'une suite décimale.*

2-Propriétés ou règles opératoires

Activité :

En utilisant la définition du logarithme en base 10 et les propriétés des puissances de 10, calcule, puis compare :

a) $log(10^6 \times 10^5)$ *et* $log\, 10^6 + log\, 10^5$
b) $log\left(\frac{10^7}{10^4}\right)$ *et* $log\, 10^7 - log\, 10^4$
c) $log\, 10^8$ *et* $8log\, 10$.

Je retiens : *a, b étant deux réels strictement positifs ;* ***n*** *un nombre rationnel.*

P_1) : $log(a \times b) = log\, a + log\, b$;

P_2) : $log\left(\frac{a}{b}\right) = log\, a - log\, b$;

P_3) : $log\left(\frac{1}{a}\right) = -\, log\, a$;

P_4) : $log\, a^n = n\ log\, a$.

NB : *Pour effectuer les calculs sur les logarithmes en base 10, on a besoin des notions suivantes : la décomposition des nombres entiers en produit de facteurs, l'écriture d'un nombre entier ou décimal sous la forme* $a.10^p$; $a, p \in \mathbb{Z}$ *et les propriétés des logarithmes en base 10.*

Remarque : $\boldsymbol{-\, log\, a}$ *est appelé : le cologarithme de a :* $\boldsymbol{Colog\, a = -\, log\, a}$;

3-Notions de caractéristique et de mantisse d'un logarithme décimal

Activité

On donne : $log\, 300 = 2{,}47712$ *et* $log\, 0{,}0075$ *deux nombres réels.*

a- *Ecris :* $2{,}47712$ *sous la forme d'une somme de deux nombres réels : la partie entière et la partie décimale (décomposition additive de:* $2{,}47712$ *) .*
b- *Identifie la partie entière (notée : C) et la partie décimale (notée : m) de* $log\, 300$.
c- *Donne le nombre de chiffres de la partie entière de 300, qu'on notera : n.*
d- *Retranche 1 à ce chiffre n*
e- *Donne la caractéristique de log300.*
f- *Donne le nombre de zéros qui précède le premier chiffre non nul de 0,0075.*

g- *Fais précéder ce nombre obtenu au f) d'un signe moins* $(-)$
h- *Donne la caractéristique de log0,0075.*

Je retiens :

- *Le logarithme décimal d'un nombre réel strictement positif* $\boldsymbol{x}$ *se décompose en deux parties :*
  - ✓ *La partie entière du logarithme, appelée **: Caractéristique du logarithme,** notée : **C ;***
  - ✓ *La partie décimale du logarithme, appelée : **Mantisse du logarithme,** notée **: m.***

Ainsi : $\boldsymbol{\log x = C + m}$; $0 \leq m < 1$; $C \in \mathbb{Z}$

Exemple : $\log 3000 = 3{,}47712$. *Donc :* $C = 3$ *et* $m = 0{,}47712$

Remarque : *Si le logarithme en base 10 d'un nombre réel strictement positif, est négatif, alors on ajoute* -1 *à sa partie entière et* $+1$ *à sa partie décimale, puis on déduit la caractéristique (qui es négative) et la mantisse.*
Exemple : On donne $\log 0{,}045 = -1{,}34678$
On a $\log 0{,}045 = -1 + (-0{,}34678)$.
$\log 0{,}045 = -1 + (-1) + (-0{,}34678 + 1)$.
$\log 0{,}045 = -2 + 0{,}65322$. *Donc* $C = -2$ *et* $m = 0{,}65322$
On écrit : $\log 0{,}045 = \overline{2}, 65322$.

- ***Calculs de la caractéristique et de la mantisse du logarithme décimal***
  Soit x *un réel strictement positif.*

✓ *La caractéristique de* $\boldsymbol{\log x}$ *est donnée par :*
— *Si* $x \geq 1$, *alors* $\boldsymbol{C = n - 1}$, *où* n *est le nombre de chiffres de la partie entière de* x.
— *Si* $0 < x < 1$, *alors* $\boldsymbol{C = -n}$, *où* n *est le nombre de zéros précédant le premier chiffre non nul de* x.

✓ *Pour trouver la mantisse du logarithme en base 10 de* x*:*
— *On détermine d'abord l'écriture scientifique de ce nombre* x *:* $x = a.10^p$
Avec : 1< $a < 10$ *, puis la caractéristique* $\boldsymbol{C = p}$
— *Ensuite, à l'aide d'une calculatrice scientifique, on calcule : log* x *.*
Donc : $\boldsymbol{m = \log x - c}$

Exemples :
Caractéristiques : $log0{,}072$ *:* $\boldsymbol{C = -2}$ ***;*** *log0,00001204 :* $\boldsymbol{C = -5}$ ***;*** $log478$*:* $\boldsymbol{C = 3 - 1 = 2}$
Mantisse de *log320000 :* $320000 = 3{,}2 \times 10^5$.
Alors $log320000 = log3{,}2 \times 10^5$ *;* $c = 5$.
Donc $m = log320000 - 5 = 5{,}50514 - 5$ *;* $m = 0{,}50514$

Exercice 1 :
En utilisant les propriétés des logarithmes en base 10, calcule : $log(64 \times 81)$ *et* $log\sqrt{3}$ *. On prendra :* $log\ 2 \approx 0{,}30103$; $log\ 3 \approx 0{,}47712$.

Solution : *je calcule* $log(64 \times 81)$ *et* $log\sqrt{3}$.

- $log(64 \times 81) = log\ 64 + log\ 81$

$log(64 \times 81) = log\ 2^6 + log\ 3^4$
$log(64 \times 81) = 6log\ 2 + 4log\ 3$
$log(64 \times 81) \approx 6(0{,}30103) + 4(0{,}47712)$ *;*

Donc $log(64 \times 81) \approx 3{,}71466$

- $log\sqrt{3} = log\, 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\, log\, 3 \approx 0{,}23856.$

NB *Par abus d'écriture, on peut écrire :*
$log\, 2 = 0{,}30103;\ log\, 3 = 0{,}47712$ *et* $log(64 \times 81) = 3{,}71466$.

Exercice 2 :
En utilisant les propriétés des logarithmes en base 10, calcule :
$a)$ $log(32 \times 81)$ *; b)* $log\, 2000 - log\, 0{,}0003$ *; c)* $N = log\, 300 + log\frac{9}{4}$*;*
d) $M = log 81000 + log\frac{9}{10^3}$*; e)* $H = log\frac{27}{8} + log\, 80000.$
On prendra : $log\, 2 \approx 0{,}30103;\ log\, 3 \approx 0{,}47712.$