TITRE DE LA LEÇON : PUISSANCES D'UN NOMBRE REEL

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Niveau : Collège - Classe : Troisième

1-Rappel : Notion de puissance

*On appelle puissance d'un nombre réel **a**, d'exposant entier **n**, le produit de **n** facteurs égaux à **a** :*

$\underbrace{a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n\ facteurs\ \text{égaux à}\ \boldsymbol{a}}.$

a *désigne la base.*

Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{10}$*, alors, le produit de **n** facteurs égaux à 10, est une puissance de 10 :*

$\underbrace{10^n = 10 \times 10 \times 10 \times \ldots\ldots \times 10}_{n\ facteurs\ \text{égaux à}\ \mathbf{10}}.$

Exemples : $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$.

$10^3 = 10 \times 10 \times 10$; $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

2-Règles opératoires:

Activité : En utilisant la définition d'une puissance,

1- a) calcule : $2^3 \times 2^4$ et 2^{3+4}. b) Compare : $2^3 \times 2^4$ et 2^{3+4}.

2- a) calcule : $3^2 \times 5^2$ et $(3 \times 5)^2$. b) Compare : $3^2 \times 5^2$ et $(3 \times 5)^2$.

3- a) calcule : $(2^3)^4$ et $2^{3\times 4}$. b) Compare : $(2^3)^4$ et $2^{3\times 4}$.

4- a) calcule : $\frac{2^4}{2^3}$ et 2^{4-3}. b) Compare : $\frac{2^4}{2^3}$ et 2^{4-3}.

5- a) calcule : $\frac{4^2}{2^2}$ et $\left(\frac{4}{2}\right)^2$. b) Compare : $\frac{4^2}{2^2}$ et $\left(\frac{4}{2}\right)^2$.

6- a) calcule : $7.10^2 + 5.10^2$ et 12×10^2. b) Compare : $7.10^2 + 5.10^2$ et 12×10^2.

7- a) calcule : $(7 \times 10^2) \times (5 \times 10^3)$ et 35×10^5.
b) compare : $(7 \times 10^2) \times (5 \times 10^3)$ et 35×10^5.

Je retiens : *Soient a et b deux nombres réels non nuls ; m n, p et q des entiers non nuls.*

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$; $a^n \times a^m \times a^p = a^{n+m+p}$.

Exemple : $B = (-3)^2 \times (-3)^5 \times (-3)^{-3} = (-3)^4$.

- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$. *Exemple:* $(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225$.
- $(a^n)^m = a^{n\times m}$. *Exemples :* $(10^5)^3 = 10^{5\times 3} = 10^{15}$; $(6^2)^3 = 6^6$.
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. *Exemple :* $\frac{10^7}{10^4} = 10^{7-4} = 10^3$.
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. *Exemple :* $\frac{4^2}{2^2} = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$.
- $a.10^p + b.10^p = (a + b) \times 10^p$.
  Exemple : $A = 2 \times 10^3 + 13 \times 10^3 = (2 + 13) \times 10^3$. *Donc* $A = 15 \times 10^3$;
- $(a \times 10^p) \times (b \times 10^q) = (a \times b) \times 10^{p+q}$.

Exemple : $B = (7 \times 10^4) \times (3 \times 10^{-7}) = (7 \times 3) \times 10^{4+(-7)}$. *Donc* $B = 21 \times 10^{-3}$

- $\boldsymbol{a^n = a^m \Leftrightarrow n = m}$
- ***Inverse d'une puissance:*** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *: est l'inverse de* a^n; $a^{-1} = \frac{1}{a}$ *:est l'inverse de a.*
  Exemples : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$.
- ***Signe d'une puissance d'un nombre :***

$$(-a)^n = \begin{cases} -a^n \ si\ n\ est\ impair \\ a^n \quad si\ n\ est\ pair \end{cases}$$

Exemples : $(-3)^4 = 3^4$; $(-1)^{79} = -1$; $(-1)^{26} = 1$.

- *Dans une suite d'opérations sans parenthèses, les puissances ont la priorité sur toutes les opérations : multiplication, addition, soustraction, division.*
  Exemple : $2^3 + 3 \times 5 = 8 + 3 \times 5 = 8 + 15 = 23$.

***NB :** Soit* n *un entier naturel :* $0^n = 0 \ (n \geq 1)$; $1^n = 1$; $a^0 = 1 \ (a \neq 0)$; $a^1 = a$.

Exercice 1 :

En utilisant la définition d'une puissance, écris chacun des nombres suivants sous forme d'une puissance d'un seul entier :

a) $12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = \cdots$;
b) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = \cdots$;
c) $64 = \cdots$; $81 = \cdots$;
d) $x = 4 \times 16 \times 16 \times 8 \times 2$ *(sous la forme d'une puissance de 2).*

Exercice 2 :

1- *Ecris* 54^4 *sous la forme* $2^a \times 3^b$ *où a et b sont des entiers à préciser.*
2- *Simplifie alors :* $P = \frac{54^4}{9 \times 6^4}$.
3- *Donne la notation scientifique de : 587402000.*

***Exercice 3** :*

Effectue les calculs suivants, puis donne le résultat en notation scientifique :

$A = 5.10^{-6} + 112.10^{-4}$; $B = 225 + 7.10^3 - 0{,}7.10^{-2}$; $C = 26.10^{-3} \times 14.10^{-2}$;

$D = (3{,}2 \times 10^{-2})(5 \times 10^2)(6 \times 10^{-1})^3$; $E = \frac{3 \times 10^7 \times 5 \times 10^{-3}}{0{,}4 \times 10^{-13}}$; $F = \frac{87 \times 10^5 \times 7{,}7 \times 10^6}{8 \times 10^{-9}}$;

$G = 20000 \times 10^{-1} - 0{,}06 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-1}$; $H = 10^6 \times \frac{1}{10^{-3}} \times (0{,}00001)^2$.

Exercice 4 :

En utilisant les propriétés des puissances, simplifie l'écriture de chacune des expressions suivantes :

a) $(-5)^4 \times 5^{-8}$; *b)* $(-3)^{-3} \times 3^{-3}$; *c)* $(-5)^2 \times (-5)^7$; *d)* $\frac{(-7)^7}{7^5 \times (-7)^2}$; *e)* $\frac{(-2)^5 \times 6^5}{(-12)^{-3}}$;

f) $\frac{(-9)^2 \times 5^6}{10^{-4} \times (-3)^{-4}}$; $H = \frac{5 \times 10^{-4} \times 0{,}6 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-1}}$; $N = \frac{2^5 \times 2^{-3} \times (2^6)^{-1}}{8 \times 2^4}$;

$M = \frac{3^{-4} \times 8^3}{(-2)^6 \times 3^7}$; $K = \frac{(12 \times 18)^2 \times 10^3}{(8 \times 45)^3}$; $T = \frac{14^5 \times (7^{-3} \times 2)^2 \times (7^3)^2 \times 4}{(2^3 \times 7^3)^3 \times 49^{-2}}$.