TITRE DE LA LEÇON : REPERAGE DANS LE PLAN
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Géométrie
Niveau : Collège - Classe : Troisième

I- Calculs dans un repère (rappel)

On munit le plan d'un repère orthonormé $(0\,;\,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1- ***Composantes scalaires (ou coordonnées) d'un vecteur bipoint et distance de deux points.***

Soient A et B deux points du plan.

-Les composantes scalaires du vecteur $\overrightarrow{AB}$ *sont données par la formule :* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

-La distance de deux points A et B est donnée par : $d(A;B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2- ***Milieu d'un segment***

Si I est le milieu du segment [AB], *alors :* $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

3- ***Norme d'un vecteur :*** *On appelle norme d'un vecteur* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *notée* $\|\vec{u}\|$, *le réel positif :* $\sqrt{x^2+y^2}$. *On écrit :* $\|\boldsymbol{\vec{u}}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2}}$ **.**

NB : $AB = d(A\,;B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

*II- P**roduit scalaire de deux vecteurs ; somme de deux vecteurs ; produit d'un vecteur par un réel.***

Activité :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. *On considère les vecteurs :* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1- *a) Calcule :* $(x_B - x_A) + (x_D - x_C)$; $(y_B - y_A) + (y_D - y_C)$;
$5 \times (x_B - x_A)$ *et* $5 \times (y_B - y_A)$.
b) Ecris les composantes scalaires de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, *puis celles de* $5\overrightarrow{AB}$.

2- *a) Calcule :* $(x_B - x_A)(x_D - x_C)$; $(y_B - y_A)(y_D - y_C)$
b) Que dire de la somme : $(x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C)$?

Je retiens : *Le plan est muni d'un repère orthonormé* $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. *On donne les vecteurs vecteurs:* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

— *Le vecteur :* $\vec{u}+\vec{v}$, *somme des vecteurs :* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, *a pour composantes scalaires :* $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

On note : $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

Dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, *on peut écrire :* $\vec{u}+\vec{v} = (x+x')\,\vec{\imath} + (y+y')\vec{\jmath}$.

— *Le vecteur :* $k\vec{u}$, *produit du vecteur* $\vec{u}$ *par un réel k, a pour composantes scalaires :* $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$. *On note :* $(k\vec{u})\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, *on peut écrire :* $k\vec{u} = (kx)\,\vec{\imath} + (ky)\,\vec{\jmath}$.

— *Le produit scalaire des vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, *noté :* $\vec{u}\cdot\vec{v}$, *est le réel :* $xx' + yy'$.

On écrit : $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$**.**

Remarque : *Quand on parle des composantes du vecteur* $\vec{u}+\vec{v}$, *il s'agit tout simplement de ses composantes scalaires ou de ses coordonnées :* $x+x'$ *et* $y+y'$.

Exemple :

On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ *, alors:*

- $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\begin{pmatrix}3+2\\-4+5\end{pmatrix}$, *soit* $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ *ou* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=5\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.

  Donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ *a pour composantes 5 et 1.*
- $(-6\overrightarrow{AC})\begin{pmatrix}-6\times 2\\-6\times 5\end{pmatrix}$, *soit* $(-6\overrightarrow{AC})\begin{pmatrix}-12\\-30\end{pmatrix}$;
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(3)\times(2)+(-4)\times(5)=6-20$, *soit* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-14$

Propriétés :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. *On donne deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

— $\boldsymbol{\vec{u}}$ ***et*** $\boldsymbol{\vec{v}}$ *sont orthogonaux si et seulement si ;* $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=0}$, *soit* $\boldsymbol{xx'+yy'=0}$

— $\boldsymbol{\vec{u}}$ ***et*** $\boldsymbol{\vec{v}}$ *sont colinéaires si et seulement si ;* $\boldsymbol{\vec{u}=k\cdot\vec{v}}$, *soit* $\boldsymbol{xy'-x'y=0}$; $k\in\mathbb{R}$

— $\boldsymbol{\vec{u}}$ ***et*** $\boldsymbol{\vec{v}}$ *sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.*

Exercice 1 :

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, *on donne les points* $E(2\,;\,-1)$ *et* $F(3\,;\,4)$.
Calcule :

a- *les composantes scalaires du vecteur* $\overrightarrow{EF}$ *;*

b- *la distance de E à F ;*

c- *la norme du vecteur* $\overrightarrow{EF}$*;*

d- *les coordonnées du point M, milieu du segment* $[EF]$.

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. *On donne les points :*
$C(2\,;\,2)$; $D(1\,;\,3)$; $M(1\,;\,4)$; *N(2 ; 3) ;* $A(2\,;\,0)$; $B(-2\,;\,0)$.

a) *Calcule les composantes scalaires des vecteurs* $\vec{u}=\overrightarrow{CD}$; $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$;$-3\vec{u}$ *et* $\vec{u}+\vec{v}$.

b) *Montre que les vecteurs* $\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{MN}$ *sont colinéaires.*

c) *Calcule la norme de chacun des vecteurs* $\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{MN}$.

d) *Calcule le produit scalaire* $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{MN}$.

e) *Monte que les vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont orthogonaux.*

Exercice 3 :

1. *Dans un repère orthonormé* $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$,*place les points :*
   $A(2\,;\,1)$; $B(1\,;\,-2)$;$C(-3\,;\,3)$; $D(-1\,;\,-1)$.
2. *On considère le vecteur :* $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.
   Calcule les coordonnées des points A', B', C' et D' tels que : $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}=\vec{u}$

Exercice 4 :

Le plan est muni du repère orthonormé$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, *on donne* $A\,(1\,;-1)$, $B\,(-1\,;\,-2)$ *et* $C\,(-2\,;\,2)$.

1- *Trouve le couple de coordonnées du point E pour que ABCE soit un parallélogramme.*

2- *Calcule les coordonnées du centre H du parallélogramme ABCE.*

3- *Détermine le couple de coordonnées du point G pour que :* $\overrightarrow{GA}+2\,\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

4- *Détermine le couple de coordonnées du point D pour que :* $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

5- *Démontre que les points B, G et D sont alignés.*