TITRE DE LA LEÇON : TRANSFORMATIONS DU PLAN : SYMETRIES

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Géométrie

Niveau : Collège - Classe : Troisième

Activité :

1- Construis un rectangle ABCD de centre O : $AD = 9\text{cm}$ et $AB = 5\text{cm}$.
2- Place les points I, J, K et L milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.
3- Trace les axes de symétrie de ce rectangle.
4- Mesure et compare OB et OD. Que dire du point O par rapport à B et D ? Compare : $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{OD}$.
5- Mesure et compare OI et OK ; AI et IB ; BJ et JC. Que dire de la droite (IK) par rapport à $[AB]$, de la droite (IK) par rapport à $[JL]$, de la droite (JL) par rapport à $[BC]$?

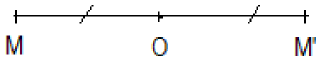
Je retiens :

1- Symétrie centrale

a) Définition

Soient O, M et M' trois points du plan.

M'est l'image de M par la symétrie centrale de centre O si et seulement si, O est le milieu de $[MM']$.



On écrit : $S_O\,(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OM'}$ ou $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$

On dit aussi que M'est le symétrique de M par rapport à O :

b) Expression analytique d'une symétrie centrale:

On munit le plan d'un repère orthonormé$(I;\vec{i},\vec{j})$

Soient $M(x\,;y) M'^{(x'\,;y')}$ et $0(a\,;b)$ trois points du plan, on a :

$S_O\,(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. Alors : $\begin{cases} \mathbf{x' = 2a - x} \\ \mathbf{y' = 2b - y} \end{cases}$

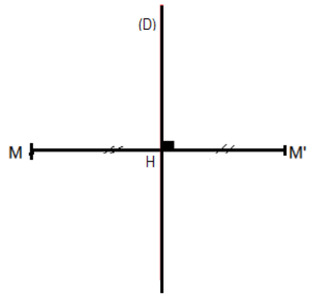
Remarque : Le centre d'une symétrie centrale est le seul point invariant par cette symétrie : $S_O\,(O) = O \Leftrightarrow x = x', y = y'$.

2- Symétrie axiale ou symétrie orthogonale

a) Définition

Soient M et M' deux points du plan, n'appartenant pas à une droite (D).

M'est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (D) si et seulement si, (D) est la médiatrice de $[MM']$.



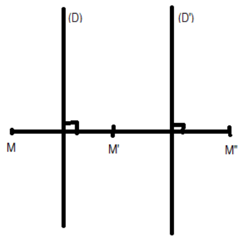
On écrit : $S_D\,(M) = M' \Leftrightarrow$ $\mathbf{(D)}$ **médiatrice de** $[MM']$.

b) Composée de deux symétries orthogonales : symétries successives

Soient $S_D\,(M) = M'$ **et** $S_{D'}(M') = M''$ **.**

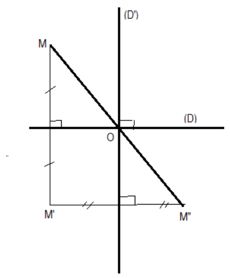
On dit alors que, M'' est l'image de M par la symétrie orthogonale S_D suivie de la symétrie orthogonale $S_{D'}$. On note : $M'' = (S_{D'} o S_D)(M)$.

Cas où les axes sont parallèles :



La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles (D) et (D'), est une translation :
$S_{D'} o S_D = t_{2\vec{u}}$; où $\|\vec{u}\| = d(D, D')$

Cas où les axes sont perpendiculaires :



La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires (D) et (D'), est une symétrie centrale de centre O tel que : $(D) \cap (D'') = \{O\}$.

Exercice 1 :

1- Construis le triangle ABC tel que : $\mathrm{BC} = 4\mathrm{cm}$, $\mathrm{mes}\widehat{\mathrm{ABC}} = 55°$ et $\mathrm{mes}\widehat{\mathrm{ACB}} = 30°$.

2- Construis le point M tel que : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

3- Construis l'image A'B'C' du triangle ABC par la symétrie centrale de centre M.

Exercice 2 :

1- Construis un parallélogramme ABCD tel que : $\mathrm{AD} = 4\mathrm{cm}$, $\mathrm{mes}\widehat{\mathrm{BA}} = 30°$ et $\mathrm{AB} = 9\mathrm{cm}$

2- Trace la hauteur issue de D dans le triangle ABD. Elle coupe (AB) en H.

3- Construis l'image A'B'C'D' du parallélogramme ABCD par la symétrie orthogonale d'axe (DH).

Exercice 3 :

1. Trace un rectangle ABCD, puis son image par la rotation de centre A et d'angle 90° (on désignera par E, F et G les images respectives de B, C et D).

2.Construis l'image de toute la figure par l'action successive de :

a. La translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$, suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$;

b. La symétrie par rapport à la droite (EA), suivie de la symétrie par rapport à la droite (CD) ;

c. La symétrie par rapport à D suivie de la symétrie par rapport à G.

Exercice 4 :

Soit un point A d'un cercle C (O ; r) et I le milieu de [OA].

Soit (D) la médiatrice de [OA] et (Δ) la tangente en A au cercle (C).

Construire l'image du cercle (C) obtenue en appliquant la symétrie par rapport à (D), puis la symétrie par rapport à (Δ). Par quelle transformation obtient-on cette image du cercle (C) ?