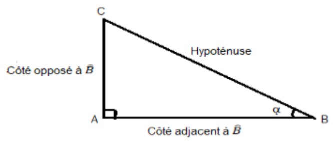
TITRE DE LA LEÇON : TRIGONOMETRIE
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Trigonométrie
Niveau : Collège - Classe : Troisième

I-TRIGNOMETRIE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE : Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Activité : ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ cm ; $AC = 3$ cm et $BC = 5$ cm.

a- *Construis la figure*
b- *Nomme le côté [BC].*
c- *Que représente les côtés [AB] et [AC] par rapport à l'angle $\hat{B}$?*
d- *Calcule les rapports : $\frac{AB}{BC}$, $\frac{AC}{BC}$ et $\frac{AC}{AB}$.*
e- *Que représente chaque rapport (qui ne dépend pas de l'angle $\hat{B}$) ?*
f- *Compare $Cos\hat{B}$ et $Sin\hat{C}$; $Cos\hat{C}$ et $Sin\hat{B}$.*

Je retiens : *Dans un triangle rectangle (triangle ABC rectangle en A par exemple) :*



- $\sin\hat{B} = \sin α = \frac{\text{côté opposé à } \hat{B}}{hypoténuse} = \frac{AC}{BC}$; $Cos\hat{B} = Cos\,α = \frac{\text{côté adjacent à } \hat{B}}{hypoténuse} = \frac{AB}{BC}$;
- $tan\hat{B} = tan\,α = \frac{\text{côté opposé à } \hat{B}}{\text{côté adjacent à } \hat{B}} = \frac{AC}{AB}$; $cotan\hat{B} = cotan\,α = \frac{\text{côté adjacent à } \hat{B}}{\text{côté opposé à } \hat{B}} = \frac{AB}{AC}$;
- *La cotangente, est aussi définie comme l'inverse de la tangente : $cotan\hat{B} = \frac{1}{tan\hat{B}}$;*
- *Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre : $Cos\hat{B} = Sin\hat{C}$; $Cos\hat{C} = Sin\hat{B}$;*
- *Les tangentes des deux angles complémentaires, sont inverses l'une de l'autre :*

$$tan\hat{B} \times tan\hat{C} = 1$$

II-RELATIONS TRIGNOMETRIQUES

Activité : ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ cm ; $AC = 3$ cm et $BC = 5$ cm.

a- *Construis la figure*
b- *Calcule : $Cos^2\hat{B}$, $Sin^2\hat{B}$ et $Cos^2\hat{B} + Sin^2\hat{B}$:*
c- *Exprime :*
  - ✓ *$tan\hat{B}$ en fonction de $Sin\hat{B}$ et $Cos\hat{B}$;*
  - ✓ *$tan^2\hat{B}$ en fonction de $Cos^2\hat{B}$, puis en fonction de $Sin^2\hat{B}$.*

Je retiens : *Soit α une mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle, alors :*

- $Cos^2α + Sin^2α = 1$.
- $tan\,α = \frac{Sinα}{Cosα}$; $cotan\,α = \frac{Cosα}{Sinα}$.
- $1 + tan^2α = \frac{1}{Cos^2α}$.
- $1 + cotan^2α = \frac{1}{Sin^2α}$
- *Propriétés : Pour tout angle aigu de mesure α, on a : $0 < Cosα < 1$; $0 < Sinα < 1$.*

*III-**COSINUS ET SINUS D'ANGLES PARTICULIERS***

Activité :

ABC est un triangle équilatéral.

Soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$

a) *Construis la figure, puis place le point D sur la demi-droite* $[BC)$ *pour que le triangle ABD soit rectangle et isocèle en H.*
b) *Calcule le cosinus et le sinus de chacun des angles :* $\widehat{BAH}$, $\widehat{ABH}$ *et* $\widehat{ADH}$ *de mesures respectives : 30°, 60°et 45°.*
c) *Complète le tableau :*

Angle de mesure α	*0°*	*30°*	*45°*	*60°*	*90°*	*180°*
Sinα	*0*				*1*	*0*
Cosα	*1*				*0*	*-1*

Je retiens :

- *Le tableau trigonométrique des angles particuliers est donné par :*

Angle de mesure α en :	*degrés*	*0°*	*30°*	*45°*	*60°*	*90°*	*180°*
	radians	*0*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sinα		*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*	*0*
Cosα		*1*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	*0*	*-1*

- *Pour remplir la ligne des sinus du tableau ci-dessus, de 0° à 90°, on procède comme suit :*
  - ✓ *On écrit les entiers naturels : 0,1, 2, 3,4 ;*
  - ✓ *On prend la racine carrée de chaque entier ;*
  - ✓ *On divise chaque racine carrée par 2.*
- *La ligne des cosinus de ce tableau, de 0° à 90 est obtenu, en écrivant les résultats de la ligne des sinus de la droite vers la gauche.*

Exercice 1 :

DEF est un triangle rectangle en D tel que $DE = 6cm$; $DF = 8\ cm$ *et* $EF = 10\ cm$.
Calcule : $Cos\widehat{DEF}$, $Sin\widehat{DEF}$ *et* $tan\widehat{DEF}$.

Exercice 2 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AC = 10{,}8cm$; $BC = 13{,}5cm$. *Calcule* $Cos\widehat{BCA}$, $Sin\widehat{ABC}$.

Exercice 3 :

ABC est un triangle rectangle en B tel que : $tan\widehat{ACB} = \sqrt{2} - 1$. *Calcule* $tan\widehat{BAC}$.

Exercice 4 :

Pour tout $\alpha \in\ ]0°,90°[$, *établis les égalités suivantes :*

a) $1 + tan^2\alpha = \frac{1}{Cos^2\alpha}$; *b)* $\alpha = 2Cos^2\alpha - 1$; *c)* $1 + \frac{1}{tan^2\alpha} = \frac{1}{sin^2\alpha}$;
d) $(cos\,\alpha + sin\,\alpha)(cos\,\alpha - sin\,\alpha) = 2Cos^2\alpha - 1$.