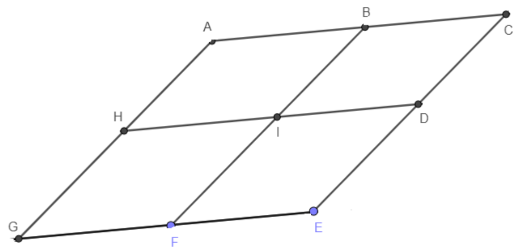
TITRE DE LA LEÇON : VECTEURS DU PLAN
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Géométrie
Niveau : Collège - Classe : Troisième

Activité :

GECA, GEDH et HDCA sont des parallélogrammes et les droites (FB) et (EC) sont parallèles.
Les points B, I, F, H et D sont les milieux respectifs des segments : $[AC]$, $[HD]$, $[GE]$, $[GA]$ *et* $[CE]$.



On admet que, si HDCA est un parallélogramme, alors : $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HC}$.

1- *En utilisant les points de la figure, cite tous les vecteurs égaux à :*
   a) $\overrightarrow{FI}$; *b)* $\overrightarrow{CB}$; *c)* $\overrightarrow{DH}$; *d)* $\overrightarrow{ID}$; *e)* $\overrightarrow{IA}$
2- *Cite trois vecteurs opposés à* $\overrightarrow{GF}$
3- *En utilisant les points de la figure, recopie et complète :*
   a) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FI} = \cdots$; *b)* $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EC} = \cdots$; *c)* $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} = \cdots$; *d)* $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GA} = \cdots$

Je retiens :

I- Notion de vecteur

1- Notation et représentation d'un vecteur

— *A tout couple* (A, B) *de points du plan, est associé un vecteur, noté :* $\overrightarrow{AB}$ *et on lit : « Vecteur AB ».*
On peut aussi noter un vecteur par une seule lettre, par exemple : $\vec{U}$ *et on lit : « Vecteur u »*
— *Un vecteur est représenté graphiquement par un segment de droite orienté.*
Exemple :

A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ *et B est son extrémité.*

2- Caractéristiques principales d'un vecteur

Un vecteur (par exemple $\overrightarrow{AB}$ *) est caractérisé principalement par :*

— *sa direction : celle de la droite (Par exemple (AB)) : famille de droites parallèles à cette droite ;*
— *son sens : celui de l'origine vers l'extrémité (de A vers B) ;*
— *sa norme ou longueur : c'est la longueur du segment (par exemple :* $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$*)*
$\|\overrightarrow{AB}\|$ *est la notation de la norme de* $\overrightarrow{AB}$.

3- *Vecteurs particuliers*

— ***Vecteur nul*** *: c'est un vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues.*

Exemple : Pour tout point du plan, le vecteur $\overrightarrow{AA}$, est le vecteur nul. On écrit $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

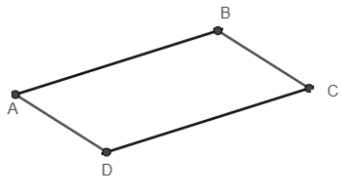
— ***Vecteurs opposés :*** *Deux vecteurs sont opposés, lorsqu'ils ont la même direction, la même norme, mais de sens opposés (ou contraires).*

Exemple : *Les vecteurs $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont opposés, on écrit : $\overrightarrow{GF} = -\overrightarrow{FG}$ ou $\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{GF}$*

4- *Vecteurs égaux*

— *Deux vecteurs sont égaux, s'ils ont les mêmes caractéristiques (même direction, même sens, même norme).*

— ***Propriété1:***



✓ *$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors le quadrilatère ABCD est un parallélogramme ;*

✓ *Si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. (On a aussi : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.)*

— ***Propriété2 :***

✓ *Si un point M est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. (On a aussi : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$) ;*

✓ *Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ou $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, alors M est le milieu de $[AB]$.*

— ***Propriété3:*** *Si $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, alors on dit que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ et on écrit : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.*

II- Addition de vecteurs et multiplication d'un vecteur par un réel

Activité : Confère activité ci-dessus

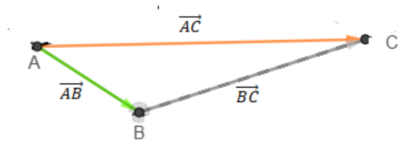
Je retiens :

1- *Addition de vecteurs*

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, trois vecteurs, alors le vecteur ; $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ est appelé somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

a- ***Relation (ou égalité) de Chasles*** *: A, B et C sont trois points du plan. On applique la relation de Chasles, si dans une somme des vecteurs, l'extrémité du premier vecteur est l'origine du deuxième vecteur. On note : $\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}_{Relation\ de\ Chasles}$.*

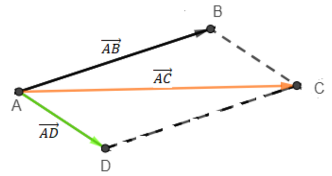
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, dans ce cas, sont dits : vecteurs consécutifs.



b- *Règle du parallélogramme*

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ *et* $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, *trois vecteurs du plan.*

Si $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, *c'est-à-dire :* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, *alors ABCD est un parallélogramme (C'est la règle du parallélogramme)*



Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$,$\vec{w}$ *du plan et pour tout réel* α *:*

- ✓ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- ✓ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- ✓ $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{u}$
- ✓ $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$; $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- ✓ $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

2- Construction de la somme de deux vecteurs

Activité :

On considère trois points non alignés A, B et C .On se propose de construire le point D tel que : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, *puis la somme :* $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

1- *a) Représente les vecteurs* $\overrightarrow{BA}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.
   b) Applique la règle du parallélogramme, puis place le point D.
2- *a) Sur une deuxième figure, construis les vecteurs :* $\overrightarrow{BA}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.
   b) Construis le vecteur somme : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Je retiens : *Pour construire la somme de deux vecteurs :*

- *De même origine, on utilise la règle du parallélogramme ;*
- *Consécutifs, on utilise la relation de Chasles.*

3- Multiplication d'un vecteur par un réel : Vecteur $k\vec{u}$; $k \in \mathbb{R}^*$

Activité :

Soit $[AB]$ *un segment de longueur 2cm. On se propose de construire les points M et N tels que :* $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB}$

1- *Représente le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *;*
2- *Multiplie par 3, la norme du vecteur* $\overrightarrow{AB}$, *puis place le point M.*
3- *Multiplie par 2, la norme du vecteur* $\overrightarrow{AB}$, *dans le sens opposé, puis place le point N.*

Je retiens :

- *Deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires s'il existe un réel k tel que* $\vec{u} = k\vec{v}$.

— *L'égalité :* $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; $(k \text{ réel}, A \neq B)$ *signifie que :*

- ✓ *Les vecteurs* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaires ;*
- ✓ *Les points A,B et M sont alignés ;*
- ✓ *Les droites (AB) et (AM) sont parallèles ;*
- ✓ $\|\overrightarrow{AM}\| = |k|\|\overrightarrow{AB}\|$
- ✓ *Le point M a pour abscisse* k *dans le repère (A, B) d'une droite.*

— ***Programme de construction :*** *La construction du vecteur* $k\vec{v}$*, dépend du signe de k,*

- ✓ *Si* $k > 0$*, alors* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ont la même direction, le même sens et* $\|\vec{u}\| = k\|\vec{v}\|$
- ✓ *Si* $k < 0$*, alors* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ont la même direction, sont de sens opposés et* $\|\vec{u}\| = |k|\|\vec{v}\|$.

Propriétés : *Pour tous vecteurs* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *du plan et pour tous réels* α *et* β*:*

- ✓ $(-\mathbf{1})\vec{u} = -\vec{u}$; $1.\vec{u} = \vec{u}$;
- ✓ $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$; $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;
- ✓ $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha.\ \beta)\vec{u}$;
- ✓ $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ *si et seulement si :* $\alpha = 0$ *ou* $\vec{u} = \vec{0}$;
- ✓ $\alpha\vec{u} \neq \vec{0}$ *si et seulement si :* $\alpha \neq 0$ *et* $\vec{u} \neq \vec{0}$

Exercice 1 : *On considère un parallélogramme ABCD, de centre O. Recopie, puis complète :*

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \cdots$; *b)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \cdots$;*c)* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \cdots$;*d)* $\overrightarrow{AC} = \cdots \overrightarrow{OC}$;

a) $\overrightarrow{OB} = \cdots \overrightarrow{DB}$; *f)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \cdots \overrightarrow{DC}$

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle.

a- Construis les points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$.

b- Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont colinéaires.*

***Exercice 3** :*

Soient A, B et C sont trois points non alignés :

a) Construis les points E et F tels que : $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ *et* $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$;

b) Démontre que : $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 4 :

ABCD est un parallélogramme

1- Construis les points J, K et H tels que : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{DK}$.

2- Démontrer que le point J est le milieu du segment $[AH]$.

Exercice 5 :

FORT est un parallélogramme, K est le symétrique de F par rapport à O.

1- Montrer que : OKRT est un parallélogramme.

2- Démontrer que : $\overrightarrow{FR} + \overrightarrow{OT} = 2\overrightarrow{OR}$ *et* $\overrightarrow{FR} + \overrightarrow{TO} = 2\overrightarrow{FO}$.